



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

**Délivré par :**

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

**Discipline ou spécialité :**

Mathématiques

---

**Présentée et soutenue par :**

Xavier Bonnefond

**le :** 3 décembre 2010

**Titre :**

Contributions à la tomographie thermoacoustique.  
Modélisation et inversion.

---

**Ecole doctorale :**

Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

**Unité de recherche :**

Institut de Mathématiques de Toulouse

**Directeur(s) de Thèse :**

Pierre Maréchal

**Rapporteurs :**

Maïtine Bergounioux

Patrick Louis Combettes

**Autre(s) membre(s) du jury**

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

Gilles Aubert

Serge Gratton

Bijan Mohammadi

Luca Amodei



# Introduction

Ce travail est le fruit de trois ans de recherches effectuées sous la direction de Pierre Maréchal au sein de l’Institut de Mathématiques de Toulouse, entre septembre 2007 et octobre 2010. Celles-ci ont eu pour objet une nouvelle technique d’imagerie médicale : la tomographie thermoacoustique. Les phénomènes thermoacoustiques suscitent un intérêt croissant dans la communauté scientifique, et leur application en imagerie médicale est tout particulièrement prometteuse. En effet, leur utilisation clinique se base sur le fait qu’un corps soumis à une illumination électromagnétique (*a priori* inoffensive) génère une onde de pression acoustique inhomogène permettant de révéler, avec un contraste et une définition inaccessibles avec les rayons X, les tissus les plus vascularisés, parmi lesquels les tumeurs. La tomographie thermoacoustique a déjà été utilisée avec succès pour imager des seins, des capillaires sanguins ou encore le cerveau de petits animaux.

Mon travail, qui visait dans un premier temps à inverser la transformée de Radon sphérique, un opérateur au cœur de cette technique d’imagerie émergente, s’est rapidement enrichi de la variété de problématiques et d’approches caractérisant le domaine. Si – comme dans le cas de la tomographie d’émission – les mathématiciens ont pu appliquer avec succès des résultats de géométrie intégrale déjà développés, ils ont su, en collaboration étroite avec des physiciens, exhiber de nouveaux axes de recherche. Ainsi le modèle initial, à l’origine des premiers travaux et nécessitant un ensemble d’approximations peu adaptées à la situation clinique, a pu être amélioré afin de mieux répondre aux besoins des praticiens.

On trouvera dans les chapitres 2 et 3 un panorama des résultats établis par la communauté. Qu’ils concernent les formules d’inversion, l’étude de stabilité ou encore la complétion de données, ceux-ci décriront, au mieux je l’espère, l’espace des problématiques dans lequel mon travail s’est inscrit. Le

chapitre 1, quant à lui, regroupe un certain nombre de considérations plus générales sur les problèmes inverses en imagerie médicale. Leur principale qualité n'est sans doute pas l'originalité, mais bien le caractère structurant pour la pensée de quelques idées simples ayant constitué un fil rouge pour mes recherches.

Même si l'on peut trouver dans ces premiers chapitres un calcul ou une approche originale, mes contributions sont principalement regroupées dans les chapitres 4 à 7. Chacun de ces chapitres s'inspire (et est constitué en partie) d'un article soit publié, soit soumis. Les deux premiers concernent une approche variationnelle pour l'inversion des opérateurs compacts, valide pour l'inversion de la transformée de Radon sphérique dans le cas d'un modèle simplifié de la tomographie thermoacoustique. Nous y développons une méthode de régularisation par mollification, ainsi qu'une stratégie d'estimation de paramètre de régularisation basée sur le niveau de bruit. Le chapitre 6 est consacré à l'amélioration du modèle de la tomographie thermoacoustique via l'introduction de l'atténuation subie par le signal mesuré. Enfin, puisque l'approche variationnelle n'est pas applicable à un modèle plus proche de la réalité, je propose dans le chapitre 7 l'utilisation d'une technique d'assimilation de données, le back and forth nudging, qui se révèle à la fois flexible et efficace.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>Notations</b>	<b>9</b>
<b>1 L'imagerie médicale et ses mathématiques</b>	<b>13</b>
1.1 Tomographies . . . . .	13
1.1.1 Survol historique . . . . .	13
1.1.2 Imagerie structurelle . . . . .	16
1.1.3 Caractéristiques liées aux signaux d'entrée et de sortie	17
1.1.4 Problèmes spécifiques à l'image . . . . .	19
1.1.5 Aspects de calcul . . . . .	20
1.2 Les problèmes inverses en imagerie médicale . . . . .	20
1.2.1 Fixer un modèle, poser le problème . . . . .	20
1.2.2 Discussion sur les données . . . . .	21
1.2.3 Problèmes mal posés, mal conditionnés . . . . .	23
1.2.4 Moindres carrés, inverse de Moore-Penrose . . . . .	28
1.2.5 Méthodes de régularisation . . . . .	30
<b>A Suppléments</b>	<b>35</b>

A.1	Décomposition en valeurs singulières . . . . .	35
A.2	Éléments d'optimisation . . . . .	36
<b>2</b>	<b>La tomographie thermoacoustique</b>	<b>41</b>
2.1	Modélisation . . . . .	41
2.1.1	Principe . . . . .	41
2.1.2	La génération de l'onde de pression . . . . .	43
2.1.3	Capteurs quasi-ponctuels . . . . .	46
2.1.4	Capteurs linéiques . . . . .	48
2.1.5	Capteurs ponctuels : le cas particulier du plan infini . . . . .	50
2.2	Quelques propriétés du problème inverse . . . . .	51
2.2.1	Continuité . . . . .	52
2.2.2	Compacité . . . . .	53
2.2.3	L'image de l'opérateur de Radon sphérique . . . . .	54
2.2.4	Injectivité . . . . .	55
2.2.5	Stabilité de la reconstruction . . . . .	59
2.2.6	Discrétisation de la transformée de Radon sphérique . . . . .	63
<b>B</b>	<b>Suppléments</b>	<b>67</b>
B.1	Solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	67
B.2	Mollification par des noyaux radiaux . . . . .	70
B.3	La transformée de Radon classique . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Formules d'inversion</b>	<b>75</b>
3.1	Aperçu . . . . .	75
3.2	Une rétroprojection filtrée . . . . .	76
3.2.1	Notations, Définitions . . . . .	77

3.2.2	Principaux résultats . . . . .	77
3.2.3	Démonstration du théorème 3.2.1 . . . . .	79
3.2.4	Discussion . . . . .	84
3.3	Séries de Fourier-Bessel . . . . .	85
3.3.1	Formule d'inversion de Norton . . . . .	86
3.3.2	Discussion . . . . .	88
3.4	Transformée de Fourier et surface d'acquisition plane . . . . .	89
3.4.1	La "Fourier-shell identity" . . . . .	90
3.4.2	Formule d'inversion . . . . .	91
3.4.3	Utilisation de réflecteurs . . . . .	93
3.5	Utilisation de l'équation de Helmholtz . . . . .	93
3.5.1	Formule d'inversion . . . . .	94
3.5.2	Commentaires . . . . .	95
<b>C</b>	<b>Formules supplémentaires</b>	<b>97</b>
C.1	Une rétroprojection filtrée . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Régularisation par mollification</b>	<b>101</b>
	Présentation . . . . .	101
	Article . . . . .	105
<b>D</b>	<b>Pseudo-commutant explicite</b>	<b>121</b>
D.1	Les applications $\mathcal{O}_m \times \mathcal{O}_n$ -invariantes . . . . .	122
D.2	Caractérisation du pseudo-commutant . . . . .	124
<b>5</b>	<b>Estimation du paramètre de régularisation</b>	<b>127</b>
5.1	Choix du paramètre de régularisation de Tikhonov . . . . .	129

5.2	Choix du paramètre de mollification . . . . .	136
<b>6</b>	<b>Introduction de l'atténuation dans le modèle</b>	<b>141</b>
	Présentation . . . . .	141
	Article . . . . .	144
<b>7</b>	<b>Utilisation du "Back and Forth Nudging"</b>	<b>163</b>
	Présentation . . . . .	163
	Article . . . . .	165
	<b>Conclusions</b>	<b>187</b>



# Notations

## Ensemble de nombres

- $\mathbb{R}$  : le corps des réels ;
- $\mathbb{C}$  : le corps des nombres complexes ;
- $\mathbb{Z}$  : le groupe des entiers relatifs ;
- $\mathbb{N}$  : l'ensemble des entiers naturels.

## Topologie

- $\bar{\Omega}$  : la fermeture topologique de l'ensemble  $\Omega$  ;
- $\partial\Omega$  : la frontière de l'ensemble  $\Omega$  ;
- $B(x, r)$  : la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$  ;
- $\omega_n$  : la mesure totale de la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ .

## Ensembles d'opérateurs linéaires

- $\mathcal{L}(E, F)$  : l'ensemble des opérateurs linéaires continus entre les espaces vectoriels normés  $E$  et  $F$  ;
- $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$  ;
- $\mathcal{K}(E, F)$  : l'ensemble des opérateurs compacts entre les espaces vectoriels normés  $E$  et  $F$  ;
- $\mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E, E)$ .

## Espaces de matrices

- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  : l'ensemble des matrices à  $m$  lignes et  $n$  colonnes à coefficients dans un corps  $\mathbb{K}$ , typiquement  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$  ;
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  : l'ensemble des matrices de taille  $n$  à coefficients dans un corps  $\mathbb{K}$  et inversibles ;

- $\mathcal{O}_n(\mathbb{K})$  : l'ensemble des matrices orthogonales de taille  $n$  et à coefficients dans un corps  $\mathbb{K}$  ;
- $\Pi(m)$  : l'ensemble des matrices de permutation signées (annexe D) ;
- $S(m)$  : l'ensemble des matrices de permutation (annexe D).

### Opérateurs linéaires : divers

- $\text{ran}(\mathcal{A})$  : l'image de l'opérateur  $\mathcal{A}$  ;
- $\text{ker}(\mathcal{A})$  : le noyau de l'opérateur  $\mathcal{A}$  ;
- $\mathcal{A}^*$  : l'adjoint de l'opérateur linéaire continu  $\mathcal{A}$  ;
- $A^T$  : la transposée d'une matrice  $A$  ;
- $\rho(A)$  : nombre de conditionnement d'une matrice réelle  $A$  (section 1.2.3) ;
- $\mathcal{A}^\dagger$  : l'inverse généralisé d'un opérateur linéaire  $\mathcal{A}$  (section 1.2.4) ;
- $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  : le domaine d'un inverse généralisé (section 1.2.4).

### Espaces fonctionnels

- $C^p(\Omega)$  : l'ensemble des fonctions  $p$  fois continûment dérivables sur l'ouvert  $\Omega$  ;
- $C_0^p(\Omega)$  : le sous-ensemble de  $C^p(\Omega)$  des fonctions à support compact dans l'ouvert  $\Omega$  ;
- $L^p(X)$  : l'ensemble des fonctions  $f$  telles que  $|f|^p$  est intégrable sur  $X$  ;
- $L^p(X')$ ,  $X' \subset X$  : le sous-ensemble de  $L^p(X)$  formé des fonctions à support dans  $X'$  ;
- $W^{\alpha,p}(\Omega)$  : l'espace de Sobolev des fonctions de  $L^p(\Omega)$  dont toutes les dérivées d'ordre inférieur au multi-indice  $\alpha$  sont dans  $L^p(\Omega)$  ;
- $W_{comp}^{\alpha,p}(\Omega)$  : le sous-ensemble de  $W^{\alpha,p}(\Omega)$  formé des fonctions à support compact ;
- $H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega)$  ;
- $H_0^s(\Omega)$  : l'adhérence des fonctions de  $C_0^\infty(\Omega)$  dans  $H^s(\Omega)$ .

### Transformations, fonctions remarquables

- $\mathcal{F}$  : la transformée de Fourier ;
- $R$  : la transformée de Radon classique (annexe B) ;
- $R_s$  : la transformée de Radon sphérique (section 2.1.3) ;
- $R_s^n$  : la transformée de Radon sphérique normalisée (annexe B) ;
- $R_c$  : la transformée de Radon circulaire (section 2.1.4) ;
- $\mathcal{H}_n$  : la transformée de Hankel d'ordre  $n$  (section 3.3) ;
- $f * g$  : la convolée des fonctions  $f$  et  $g$  ;
- $\delta$  : la distribution de Dirac en 0 ;

- $\mathbb{1}_S$  : fonction caractéristique de l'ensemble  $S$  ;
- $J_n$  : la  $n^{\text{ème}}$  fonction de Bessel.

### **Analyse microlocale**

- $WF(f)$  : le spectre singulier d'une application  $f$  (section 2.2.5) ;
- $\mathcal{B}(x_0, \xi_0)$  : la projection dans l'espace des  $(x, t)$  des courbes bicaractéristiques de conditions initiales  $(x_0, \xi_0)$  et  $(x_0, -\xi_0)$  ;
- $\mathcal{B}_x(x_0, \xi_0)$  : la projection de  $\mathcal{B}(x_0, \xi_0)$  dans l'espace des  $x$ .

### **Analyse convexe**

- $\text{dom} f$  : le domaine effectif d'une application convexe  $f$  ;
- $\partial f(x)$  : le sous-différentiel d'une application convexe  $f$  en  $x$  ;
- $\text{argmin}$  : élément réalisant le minimum d'une quantité précisée.

### **Divers**

- $\langle x, y \rangle$  : le produit scalaire de  $x$  et de  $y$  ;
- $\|x\|$  : la norme de  $x$  ;
- $|x|$  : le module du nombre complexe  $x$ .



# Chapitre 1

## L'imagerie médicale et ses mathématiques

### 1.1 Tomographies

#### 1.1.1 Survol historique

L'homme n'a pas attendu d'avoir le support de l'image pour développer une pratique médicale efficace. On rapporte que dès la préhistoire certains médecins de la première heure opéraient déjà par trépanation avec, dit-on, un taux de survie avoisinant les 60% [63, 10]. On imagine cependant toute la difficulté qu'il devait y avoir à élaborer et partager un tel savoir par la seule voie de la transmission orale, ainsi que le nombre de vie sacrifiées à cette tâche lors d'explorations hasardeuses, et ce sans le pouvoir synthétique et la clarté d'une simple image de l'intérieur d'un corps. Le but ici n'est évidemment pas de fournir une histoire des pratiques médicales, de ses succès comme de ses égarements – d'autres plus compétents s'en sont déjà chargés bien avant –, mais plutôt d'ébaucher une chronologie des avancées principales en imagerie médicale afin que, je l'espère, les enjeux d'hier puissent éclairer de leur mieux les enjeux d'aujourd'hui.

L'histoire de l'imagerie médicale fut longtemps celle de l'imagerie à rayons X. C'est le nom que l'on donne aux rayonnements électromagnétiques issus du bombardement d'un solide par des faisceaux d'électrons accélérés par des tensions variant de 103 à 106 V, et d'une longueur d'onde comprise

entre 0.01 et 5nm. C'est en étudiant l'un de ces rayons que le Bavarois Wilhelm Conrad Röntgen découvre, en novembre 1895, l'opacité des os pour ces rayonnements, permettant l'impression en ombre chinoise de la structure osseuse sur un écran. La découverte, annoncée le 28 décembre 1895, et qui vaudra un prix Nobel à Röntgen en 1901, est rapidement relayée par la presse et les laboratoires du monde entier se dotent de l'appareillage nécessaire aux premiers tests. En France c'est Antoine Bécélère, resté dans les mémoires comme le père de la radiologie française, qui œuvrera efficacement à la promotion et au perfectionnement des nouveaux appareils ; il mettra en place les bases de la sémiologie radiologique et de la radiothérapie.

Après la première guerre mondiale, de nombreuses avancées techniques permettent de perfectionner l'imagerie existante : amélioration de la luminosité et des contrastes, découvertes de produits opacificateurs pour imager de nouveaux organes, etc. Néanmoins la qualité du cliché reste limitée par la superposition des différents plans traversés par les rayons, et l'astuce technique consistant à appliquer des mouvements inverses à l'émetteur et à l'écran afin de dégager une coupe selon le plan du centre de l'homothétie, donnant naissance au premier "tomographe", n'est pas satisfaisante. Les mathématiques, par manque d'outils informatiques suffisamment puissants, ont encore peu de place dans les différentes techniques existantes.

Le terme *tomographie*, du grec *tomê*, signifiant *coupe*, désigne une technique d'imagerie permettant d'obtenir des vues en coupe d'un corps. Retraitées, ces coupes peuvent donner naissance à une visualisation en trois dimensions d'un organe. Aujourd'hui ce terme désigne par extension une méthode d'imagerie non invasive. Le physicien Allan M. Cormack posa pour la première fois les bases d'une tomographie utilisant les rayons X dans deux articles datés de 1963-1964. L'idée n'était pas vraiment nouvelle : des médecins avaient déjà intuité dans les années 50 qu'il était possible de retrouver la position d'objets en faisant tourner le tube à rayons X autour de ceux-ci, mais à l'idée manquait la possible mise en œuvre. Il faudra attendre 1972 pour que Godfrey N. Hounsfield, un ingénieur britannique disposant de la puissance de calcul nécessaire, mette au point le premier appareil de *computerized tomography*, *scanner X* en français, et image un crâne humain. Cormack et Hounsfield obtiendront le prix Nobel de médecine en 1979 pour ces avancées.

À plus d'un titre, on peut considérer que les années 50-60 ont marqué un tournant dans l'histoire de l'imagerie médicale, sans doute grâce aux progrès techniques ayant permis la mise en pratique de nombre de théories jusque-là orphelines d'applications. Outre le scanner X, citons les débuts

de la médecine nucléaire en 1954 avec la caméra à scintillation du physicien américain H. O. Anger, qui permettra l'émergence de la tomographie à émission de positons, et bien entendu l'échographie. Dès 1880, Pierre et Jacques Curie découvrent la piézo-électricité, permettant de produire facilement les ultrasons récemment découverts par le physiologiste anglais Francis Galton. En 1957, au Royaume-Uni, l'ingénieur Tom Brown et le gynécologue Ian Donald réalisent un prototype d'imagerie par réflexion des ultrasons. L'effet Doppler, intégré aux applications en 1959, et les progrès informatiques permettent d'améliorer les performances de l'échographie. Malgré une interprétation des images parfois délicate pour le praticien, cette technique à l'appareillage minimaliste est sans doute devenue la plus répandue de nos jours.

C'est également après la Seconde Guerre mondiale que les bases de l'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) sont posées. Felix Bloch et Edward M. Purcell, deux physiciens américains, décrivent en 1946 le comportement du proton dans un champ magnétique. Un an à peine après cette découverte, Bloch tente une application biologique : en 1948, il introduit un doigt dans la bobine de son spectromètre et reçoit un signal RMN (Résonance Magnétique Nucléaire). Il restait à coder le signal dans l'espace pour en faire une image. Aux États-Unis, Raymond Damadian, croit, dès 1971, à la possibilité de déceler ainsi les lésions tissulaires et Paul Lauterbur publie, en 1973, les premières images en coupes expérimentales. La recherche progresse : Peter Mansfield et son équipe obtiennent en 1976, au Royaume-Uni, des images de doigts et de poignets. Il devient possible d'imager le crâne humain dès 1979. Suite à ces avancées, le prix Nobel de médecine est attribué en 2003 conjointement à Lauterbur et Mansfield. Tandis que le scanner X donne une carte anatomique avec effet de masque osseux, l'IRM fournit une carte anatomique et chimique avec transparence du squelette mais apparence significative des tissus mous. L'IRM dépend de paramètres multiples, ce qui fait sa valeur pour tenter de caractériser les tissus examinés : la densité de protons, les *temps de relaxation* qui dépendent de la structure chimique moléculaire, les flux sanguins ou capillaires et d'autres facteurs interviennent. Le contraste des tissus dépasse celui des meilleurs scanners X, et tous les plans de coupe sont possibles (le scanner n'autorise que des coupes horizontales, dites axiales ou transversales). L'IRM est probablement la plus prolifique des méthodes d'imagerie utilisées de nos jours. Elle résume bien à elle seule les progrès qui ont été nécessaires pour faire du radiodiagnostic un outil efficace : associations de découvertes théoriques en physique, chimie et biologie avec un savoir-faire technique en constante progression, puis

exploitation des possibilités de calcul des mathématiques combinées à celles de l'outil informatique.

### 1.1.2 Imagerie structurelle

L'imagerie *structurelle*, par opposition à l'imagerie *fonctionnelle* qui cherche à rendre compte du fonctionnement des organes, a pour but de fournir des informations d'ordre anatomique sur le corps du patient. Il pourra s'agir de déterminer la forme ou la disposition de différents organes et tissus, aussi bien que la présence et la localisation de corps étrangers, tissus cancéreux, etc. La technique choisie doit fournir une représentation (au sens large, image 2D, 3D, vidéo) claire et fiable, à même d'aider le diagnostic, l'intervention, l'élaboration et la transmission des savoirs médicaux.

La mise au point d'une technique d'imagerie médicale repose souvent sur une constatation d'ordre biologique, physique ou encore chimique qui seule permettra d'extraire de l'information depuis un dispositif de mesure idoine. Pour garder un certain niveau de généralité, disons qu'il s'agit là d'exhiber une loi permettant d'ébaucher un modèle :

$$\mathcal{M}: \{\text{Propriétés anatomiques}\} \longrightarrow \{\text{Mesures}\}$$

On pose ainsi les fondations de la future méthode, dont la fiabilité reposera en partie sur une certaine "injectivité" de ce premier modèle : un jeu de mesures particulier permet-il d'affirmer que la situation à l'intérieur du corps est  $A$  et non  $B$  ? En effet il serait par exemple peu concluant de chercher à déterminer la proportion de femmes dans un groupe donné en se contentant de dénombrer les robes.

*Exemples 1.1.1.* (a) Le scanner X est basé sur les différentes capacités des tissus à atténuer un rayon X les traversant. On note une différence notable entre certains types de tissus, ce qui conduit à chercher à reconstruire la carte des coefficients d'atténuation dans le corps.

(b) L'échographie utilise l'écho partiel généré par une onde ultrasonique rencontrant une discontinuité tissulaire. En mesurant le temps de retour de cet écho à la source depuis quelques directions, on cherche à dessiner les frontières entre les tissus ayant des propriétés significativement différentes pour les ondes ultrasoniques.

(c) L'IRM tire parti des propriétés de certains noyaux atomiques à spin non nul présents dans les tissus, notamment l'hydrogène présent dans l'eau du corps.



### 1.1.3 Caractéristiques liées aux signaux d'entrée et de sortie

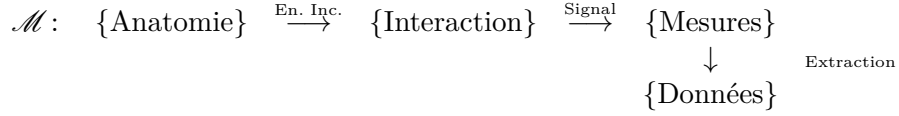
Bien évidemment, toute la difficulté, mais aussi tout l'intérêt, des méthodes d'imagerie médicale vient de ce que l'on dispose seulement de mesures prises depuis l'extérieur du corps (ou depuis sa surface dans certains cas). Or ce dernier ne communique pas spontanément, ou tout du moins pas dans un langage que nous savons interpréter, les informations utiles à sa guérison. Ainsi, si l'on souhaite connaître telle ou telle information à propos d'un groupe de personnes se trouvant dans une salle, mais sans pouvoir entrer dans cette salle, l'attente passive n'est sans doute pas la bonne stratégie, d'autant que ces gens ne peuvent deviner par eux-mêmes les informations qui vous sont nécessaires. Il vous faudra certainement communiquer avec eux, poser des questions à voix haute par exemple, et attendre les réponses, ou les autres réactions qui s'en suivront.

Il en va de même dans un quelconque protocole d'imagerie : le corps est exposé à une source d'énergie (signal d'entrée) et le dispositif de mesure recueille un signal résultant de l'interaction entre l'excitation artificielle et le corps (signal de sortie). Cette interaction peut-être de deux types :

- (i) Le signal d'entrée est simplement modifié lors de son passage à travers les tissus. Il peut être atténué, déphasé, dévié, etc., selon sa nature. Il s'agit du principe originel, gouvernant l'imagerie à rayons X.
- (ii) L'énergie incidente est à l'origine de l'émission par le corps d'un signal de nature différente. On parle alors de méthodes mixtes, celles-ci ont souvent l'avantage de combiner les points forts des deux types d'énergie (et malheureusement, parfois, leurs inconvénients).

Par conséquent la loi à la base du modèle doit décrire le plus précisément possible les phénomènes biologiques et physiques gouvernant l'interaction entre l'énergie incidente et les tissus, et l'"injectivité" du modèle réside dans la réponse à cette question : deux états anatomiques significativement différents vont-ils générer deux signaux de sortie distinguables ? En outre les mesures effectuées sont peut-être redondantes, ou peu maniables dans leur forme brute, c'est pourquoi l'on est amené à en extraire l'information strictement utile au processus de reconstruction : les données du problème. Le processus d'extraction peut également tenir compte de défauts connus des détecteurs utilisés, ou de quelque autre phénomène pouvant fausser les mesures (réponse fréquentielle, atténuation, source extérieure, etc.). Nous avons

à présent complété le schéma du modèle :



Bien sûr ce modèle théorique ne peut être, au mieux, qu'une représentation schématique des phénomènes se produisant réellement, et les données effectivement obtenues seront influencées par nombre de comportements que la théorie n'aura pas pris en compte, parfois par besoin de simplification. Si l'on ajoute à cela certaines imprécisions imprévisibles des appareils de mesures et la discrétisation imposées par l'informatique numérique, on voit déjà combien d'obstacles se dressent sur la voie de la reconstruction d'une image. Obstacles que, nous le verrons plus tard, la théorie mathématique s'efforcera de contourner.

*Exemples 1.1.2.* (a) En imagerie par scanner X, les tissus sont exposés à des rayons X, qui sont absorbés lors de leur traversée du corps. On recueille ces mêmes rayons atténués, et leur intensité de sortie, associée au modèle adéquat, fournit la projection le long de la trajectoire des rayons de la capacité d'absorption du corps. Les rayons X utilisés fixent les différences d'absorptivité des tissus, déterminant ainsi le contraste de la future image. L'excellent ouvrage [68] est très complet sur les mathématiques liées à ce problème.

(b) En échographie, on émet des ondes ultrasoniques (3-5MHz) se propageant facilement dans les liquides et semi-liquides. La connaissance des lois de propagation et de réflexion de ce signal permet l'identification de discontinuités tissulaires après réception des échos partiels. Le procédé est limité par la réflexion totale de ces ondes sur les os et les gaz, et sa définition dépend directement de la fréquence du signal d'entrée et de la résolution spatiale de la mesure de l'écho. Voir [53].

(c) En IRM, le corps examiné est d'abord placé dans un puissant champ magnétique (de 5 000 à 20 000 Gauss) qui aligne les protons dans l'axe du champ. Un deuxième champ magnétique oscillant perturbe l'équilibre et déclenche une bascule des axes de rotation des noyaux. Lorsque l'excitation cesse, le système ainsi perturbé revient à l'état initial et réémet un signal (restitution d'énergie) pendant le temps du retour à l'équilibre (temps de relaxation). Des codages spatiaux utilisant des gradients de champ magnétique permettent de mesurer le signal point par point et de reconstruire l'image d'une coupe. Voir [46].

### 1.1.4 Problèmes spécifiques à l'image

Dans tous les travaux présentés, j'ai avant tout considéré l'image comme un outil pour le diagnosticien. En ce sens les critères à satisfaire dépendent toujours des besoins de l'utilisateur, et on ne peut juger de la "fidélité" d'une image qu'en fonction de la nature de l'information que souhaite en tirer le médecin. Un exemple vaut mieux ici que de longues explications : dans le cas de la détection d'une tumeur, il serait inconsideré de sacrifier la fiabilité du diagnostic à un quelconque critère esthétique ; il est bien vain d'essayer de rendre parfaitement la forme et la texture des tissus cancéreux si cela doit causer l'apparition d'inclusions pouvant fausser le jugement.

Tout en gardant ce principe à l'esprit, deux caractéristiques restent primordiales dans une image :

- (i) Le contraste, qui mesure à quel point une variation significative d'une propriété dans le corps induit une différence notable dans les niveaux de gris de l'image ;
- (ii) La définition, qui assure la précision dans la localisation de ces variations.

Bien sûr il conviendra également de s'assurer que les erreurs successives (erreurs du modèle, de mesures, de calculs, etc.) n'affectent pas dans une trop large mesure la lisibilité de l'image : on parlera ici de *stabilité* du processus de reconstruction.

Finalement, quel que soit le mode de représentation choisi, le produit final sera un objet discret, tant par la faute de l'appareillage destiné à l'affichage que des outils de calcul. La plupart du temps, dans le cas d'images en deux dimensions, une image discrète de résolution  $(res_x, res_y) \in \mathbb{N}^2$  sera définie par une matrice

$$N := (n_{ij})_{(i,j) \in (1, res_x) \times (1, res_y)},$$

où les coefficients  $n_{ij}$  décrivent le niveau d'intensité (le niveau de gris) de l'image aux points

$$x_{ij} := (ih, jh),$$

pour un pas d'espace  $h > 0$  fixé.

Ce système, correspondant à la projection de la fonction d'intensité  $u$  sur le sous-espace engendré par les fonctions indicatrices  $\mathbb{1}_{p_{ij}}$  (où  $p_{ij}$  est le pixel contenant  $x_{ij}$ ), semble être celui introduisant le moins d'a priori dans la reconstruction. Néanmoins il s'agit d'une réelle donnée du problème et son influence ne devrait jamais être négligée.

### 1.1.5 Aspects de calcul

Si l'introduction de l'outil informatique a profondément transformé l'imagerie médicale, elle a aussi fait émerger, comme dans tous les champs où elle s'est produite, tout un ensemble de questions nouvelles. La première de toutes, au moins du point de vue mathématique, est celle des erreurs de calcul. Inconcevables pour le néophyte, elles sont pourtant la cause de bien des soucis lorsqu'il s'agit, par exemple, de tester telle formule algébrique avec un algorithme. Dès lors, le mathématicien doit être capable de proposer à la machine des calculs qui minimisent l'impact des erreurs d'arrondis, mais aussi d'éviter que ne se présente une division par zéro dont l'ordinateur ne connaît pas mieux le résultat que nous.

Le deuxième aspect computationnel omniprésent concerne le coût des algorithmes, et par conséquent la durée des calculs. Il semble assez naturel que cette question quantitative, au cœur de l'émergence même de ces technologies, soit restée importante. En outre je reste persuadé que l'économie d'un algorithme reste par-dessus tout le miroir d'idées mathématiques brillantes et claires. Cependant il est regrettable que les questions du temps réel (permettant l'affichage quasiment instantané de l'image) et de la super-résolution soient systématiquement posées alors même qu'elles sont indifférentes à bon nombre d'applications. C'est pourquoi je pense que dans les cas où le diagnostic peut souffrir quelques secondes de délai et où la dimension caractéristique d'une méthode (limitation inhérente de la résolution par la taille des capteurs par exemple) ne peut être en dessous du millimètre, la réduction du coût des calculs devrait être pensée en termes de réduction de besoins en machines. Parce que le "coût machine" est aussi un coût économique et un coût écologique.

## 1.2 Les problèmes inverses en imagerie médicale

### 1.2.1 Fixer un modèle, poser le problème

Nous avons vu que la panoplie de méthodes ayant émergé depuis les années 50 et regroupées sous l'appellation peu précise de *nouvelle imagerie*, nécessite l'emploi massif de résolutions mathématiques et de calculs informatiques afin que les mesures donnent naissance à une information directement utilisable par le médecin. Ce travail s'opère en deux étapes. La première, déjà

traitée en partie dans la section précédente, consiste à dégager les lois et les constantes régissant les phénomènes physiques produisant le signal mesuré et à opérer les approximations essentielles conduisant à fixer un modèle physique pour ces phénomènes. Du point de vue mathématique, il s'agit de définir un opérateur :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}: \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ f &\longmapsto \mathcal{A}f = g,\end{aligned}$$

où  $\mathcal{F}$  représente l'espace des états, interprétables ensuite en images (dans un sens large), et  $\mathcal{G}$  celui des données. Ce faisant, on a établi ce qu'on appelle communément un *modèle direct*. Bien sûr l'opérateur  $\mathcal{A}$  ne peut jamais rendre réellement compte des comportements exacts, mais il doit permettre une certaine fiabilité des décisions. Notamment on peut choisir les espaces fonctionnels  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  afin de prendre en considération les propriétés supposées ou souhaitées de l'état, de l'image et des données, toute information disponible *a priori*. La deuxième étape, où s'exercent les capacités du mathématicien et du numéricien, se ramène à la résolution du *problème inverse* :

$$\mathcal{A}f = g, \tag{1.1}$$

où  $g$  contient les données issues des mesures physiques, et où l'état  $f$  reste à déterminer.

Dans la plupart des applications, les données  $g$  ne se trouveront pas dans l'image de  $\mathcal{A}$ , qui lui-même ne sera pas toujours injectif. Il sera donc totalement vain de chercher un  $f$  vérifiant *stricto sensu* l'équation (1.1), et le problème deviendra plutôt :

$$\mathcal{A}f \approx g,$$

où le sens à donner au signe ' $\approx$ ' reste à fixer. Citons la meilleure approximation au sens d'une norme (moindres carrés), ou encore la construction d'une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers une solution de (1.1).

### 1.2.2 Discussion sur les données

Le second membre de l'équation (1.1) est fourni par l'acquisition de mesures propres à la méthode d'imagerie étudiée. Dans un cas idéal ce  $g$  s'écrirait  $\mathcal{A}f_0$  pour un certain état  $f_0$ , mais en réalité il peut se décomposer comme suit :

$$g = \mathcal{W}(g_{exact}) + g_{bruit},$$

où

$$g_{exact} := (\mathcal{A} + \mathcal{A}_\epsilon)(f_0),$$

pour un  $f_0 \in \mathcal{F}$ .

Cette écriture permet de pointer la plupart des erreurs venant de l'acquisition des données. Tout d'abord la perturbation  $\mathcal{A}_\epsilon$  de  $\mathcal{A}$  représente l'écart du modèle direct fixé à la réalité. Par exemple, en échographie on considère souvent que l'onde ultrasonique se propage sans encombre dans les tissus mous alors qu'en réalité, pour des fréquences dépassant les 5MHz, celle-ci est très fortement atténuée lors de sa progression ; dans ce cas les données s'écarteront nettement du modèle attendu, perturbant la reconstruction. Ensuite l'opérateur  $\mathcal{W}$  modélise certains défauts des détecteurs employés, dont le principal est la réponse impulsionnelle imparfaite, c'est-à-dire une sensibilité dépendant de la fréquence du signal ;  $\mathcal{W}$  est typiquement un opérateur de convolution régularisant. Dans les premiers dispositifs de tomographie à rayons X, les récepteurs censés mesurer l'intensité d'un rayon ayant traversé le corps avaient tendance à recevoir de l'énergie provenant d'autres rayons, faussant ainsi les mesures ; l'ajout d'une grille anti-diffusante en plomb bloquant les rayons obliques a marqué un réel progrès technique pour cette méthode d'imagerie. Contrairement à  $\mathcal{A}_\epsilon$  ou à  $g_{bruit}$ ,  $\mathcal{W}$  peut être relativement bien déterminé par une bonne connaissance du matériel et du processus de mesure. Quant à  $g_{bruit}$ , il représente tous les autres aléas que les conditions de laboratoire ou de clinique peuvent causer : défaut d'isolation, vibrations, etc. La liste est longue et imprévisible, cependant on considère souvent que  $g_{bruit}$  perturbe le problème surtout dans les hautes fréquences et que de plus

$$\|g_{bruit}\| \ll \|g\|.$$

Les modèles de bruit sont certainement à considérer au cas par cas, néanmoins certains cas types permettent de mettre à jour les principaux bons et mauvais comportements d'une méthode face à ces perturbations. Ainsi en l'absence de mesures cliniques je considérerai que  $g_{bruit}$  est la réalisation d'une variable aléatoire, souvent gaussienne.

On parlera de *bruit blanc* lorsqu'aucune composante de Fourier de cette réalisation n'est dominante, de *bruit coloré* dans le cas contraire.

### 1.2.3 Problèmes mal posés, mal conditionnés

Avant de chercher à résoudre un problème inverse du type de (1.1), il convient de s'assurer que la démarche est raisonnable. Tout d'abord il paraît sensé de se demander si l'opérateur  $\mathcal{A}$  est effectivement inversible, et sur ce point nous avons vu dans la discussion précédente qu'il y a peu d'espoir qu'en pratique  $\mathcal{A}$  soit ne serait-ce que surjectif. Même en supposant que l'on puisse contourner cette difficulté (pourtant de taille), une autre question persiste : le bruit inévitablement présent dans les données  $g$  ne va-t-il pas rendre toute interprétation de l'image impossible ? C'est pourquoi l'on demande généralement qu'une petite perturbation du côté des données n'induisse qu'un léger déplacement dans l'espace  $\mathcal{F}$  des états ; ce n'est ni plus ni moins que la continuité de l'opérateur  $\mathcal{A}^{-1}$ , lorsque celui-ci existe. Au regard de ces observations, on peut donner la définition traditionnelle d'un problème bien posé, tirée de [34] :

**Définition 1.2.1** (Problème bien posé). On dit que le problème  $g = \mathcal{A}f$  est *bien posé au sens d'Hadamard* si et seulement si pour tout  $g$  dans  $\mathcal{G}$  il existe un unique  $f$  dans  $\mathcal{F}$  vérifiant  $\mathcal{A}f = g$ , et si en outre de tels  $f$  dépendent continûment des données  $g$ .

Si cette définition a le mérite de pointer du doigt les principaux obstacles rencontrés lors de la résolution d'un problème inverse, elle est inutilisable en pratique parce qu'elle en demande à la fois trop et pas assez. Trop car nous avons déjà vu que si  $\mathcal{G}$  est choisi suffisamment grand pour contenir toutes les données bruitées possibles,  $\mathcal{A}$  ne sera certainement pas surjectif. Pas assez car la simple continuité n'a que peu de sens pour les calculs sans une quelconque donnée quantitative supplémentaire (constante de Lipschitz, etc.) : à défaut d'une discrétisation suffisamment fine, n'importe quelle fonction continue fortement oscillante aura la même version discrete qu'une autre fonction hautement discontinue, et donc les mêmes comportements numériques.

Il convient donc de disposer d'éléments plus précis dans l'évaluation d'un problème inverse. La *décomposition en valeurs singulières*, ou SVD (de *Singular Values Decomposition* en anglais), fournit souvent un outil efficace pour juger des instabilités numériques causées par un opérateur (voir l'annexe A pour plus de détails). Supposons que l'on ait à résoudre un problème inverse linéaire et déjà discrétisé :

$$Ax = y \tag{1.2}$$

où  $A$  est une matrice carrée inversible de taille  $n \in \mathbb{N}^*$  dont on connaît la SVD  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$  et les matrices de changement de base orthogonales  $U := (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  et  $V := (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ . Ainsi le problème (1.2) est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_n \rangle \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

avec  $\tilde{\mathbf{x}} := V^T \mathbf{x}$ . Notons ici que relativement à l'espace  $\mathbb{R}^n$  le problème (1.2) est bien posé au sens d'Hadamard. Cependant l'on voit immédiatement dans la formulation (1.3) que si les  $\sigma_i$  viennent à être significativement inférieures aux  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle$  le calcul naïf

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle}{\sigma_i}, \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad (1.4)$$

donnant la solution en algèbre exacte va poser problème.

Or tous les modèles régularisants conduisent à un problème inverse dont les valeurs singulières décroissent rapidement vers 0. Prenons un cas d'étude simple, avec  $A = A_{conv}$  la matrice d'une convolution discrète par une gaussienne. La figure 1.1 représente la SVD de  $A_{conv}$ .

Supposons que l'on cherche à reconstruire une fonction plateau  $\mathbf{x}_0$  à partir de données artificiellement bruitées :

$$\mathbf{y} := A\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_{bruit}$$

avec

$$\frac{\|\mathbf{y}_{bruit}\|}{\|A\mathbf{x}_0\|} \leq 0.01.$$

Alors la figure 1.2 montre à quel point ce problème est instable, et ce même avec un bruit relatif moyen de seulement 1%.

Ici, bien qu'il soit formellement bien posé, le problème inverse est *mal conditionné* (ce à quoi l'on pouvait s'attendre considérant qu'il s'agit d'une discrétisation du problème de l'inversion de l'équation de la chaleur, notoirement mal posé). Il y a deux manières de concevoir ce mauvais conditionnement. La première consiste à se concentrer sur les seules valeurs singulières de la



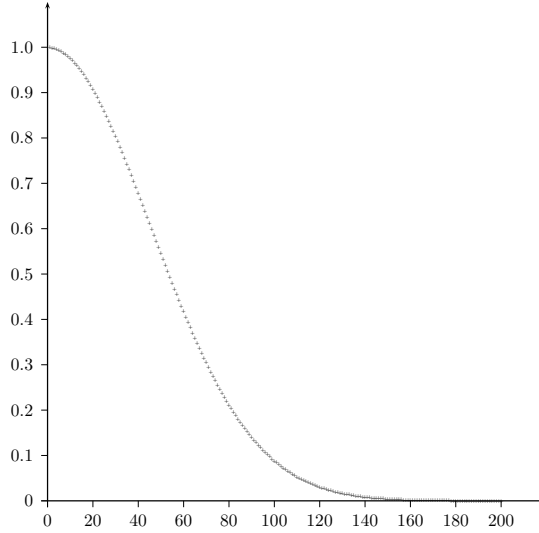


FIGURE 1.1 – Profil des valeurs singulières de  $A_{conv}$

matrice  $A$ . On peut par exemple considérer le nombre de conditionnement de  $A$ , noté  $\rho(A)$  :

$$\rho(A) := \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

Celui-ci fournit une borne, atteinte en au moins un jeu de données, pour l'inégalité :

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \rho(A) \frac{\|\delta \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|},$$

dès que  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$  et  $A(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{y} + \delta \mathbf{y}$ .

Ainsi un grand nombre de conditionnement amène à craindre qu'une faible erreur commise sur le second membre  $\mathbf{y}$  puisse entraîner une grande erreur sur le résultat  $\mathbf{x}$ . S'il peut donner des indications précieuses, le nombre de conditionnement ne peut suffire à décider du comportement probable d'un problème. En effet il est nécessaire de tirer de l'information de tous les espaces propres de  $A$  et le calcul (1.4) laisse penser que c'est le profil spectral dans son ensemble qu'il convient d'étudier : il pourra par exemple indiquer quels espaces propres semblent promis à un comportement erratique afin de projeter le problème sur leur orthogonal.

Si cette approche permet de se prévenir contre les pires situations, elle ne prend pas en compte les données dont on dispose. En effet le calcul (1.4)

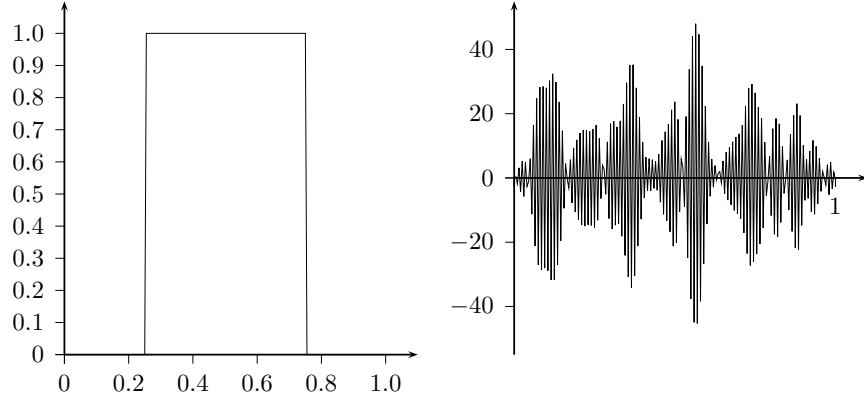


FIGURE 1.2 – Problème (1.2) : objet original et reconstruction naïve. L’erreur relative moyenne est supérieure à 25%.

suggère que la grande instabilité observée vient de ce qu’à partir d’un certain ordre on a :

$$\sigma_i \ll |\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle|, \quad \forall i \geq N.$$

Cela nous amène à la définition d’une condition qu’il paraît raisonnable d’exiger d’un problème si l’on veut être capable de reconstruire les composantes dans les hautes fréquences de l’objet (voir [38], pour un exposé détaillé).

**Définition 1.2.2** (Condition de Picard discrète). On dit du problème discret (1.2) qu’il satisfait la condition de Picard discrète (CPD) si, en moyenne, les coefficients  $(|\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle|)_{1 \leq i \leq n}$  décroissent plus vite que les  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Comment cette condition est-elle violée en pratique ? Reprenons l’exemple de l’opérateur de convolution  $A_{conv}$ . Afin de mieux comprendre le comportement des composantes du second membre selon les espaces propres de  $A_{conv}$ , la figure 1.3 représente quelques-uns des premiers vecteurs  $\mathbf{u}_i$ . Il est évident que ceux-ci ont des composantes de Fourier dominantes qui vont croissant, et l’on peut s’attendre à ce que les  $|\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle|$  correspondent à des fréquences de plus en plus élevées du second membre  $\mathbf{y}$ .

Ainsi lorsque les données contiennent du bruit, à partir d’un certain rang les coefficients  $|\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle|$  ne décroissent plus suffisamment du fait des hautes fréquences de la partie  $y_{bruit}$ . La figure 1.4 illustre ce phénomène.

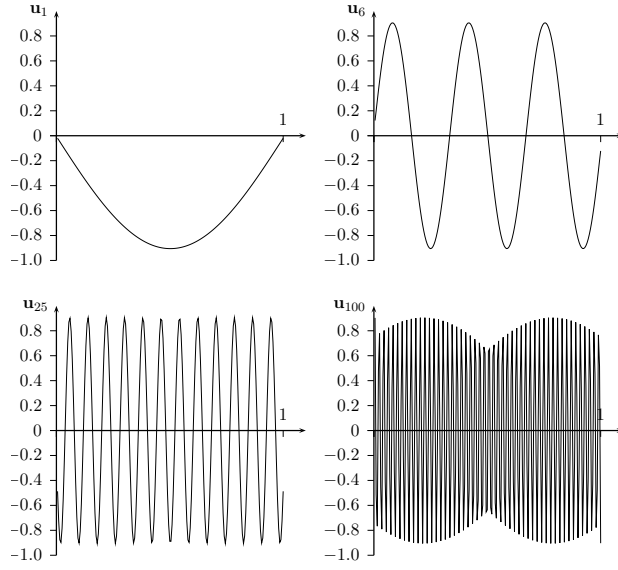


FIGURE 1.3 – Aspect de différents vecteurs propres à gauche de  $A_{conv}$ .

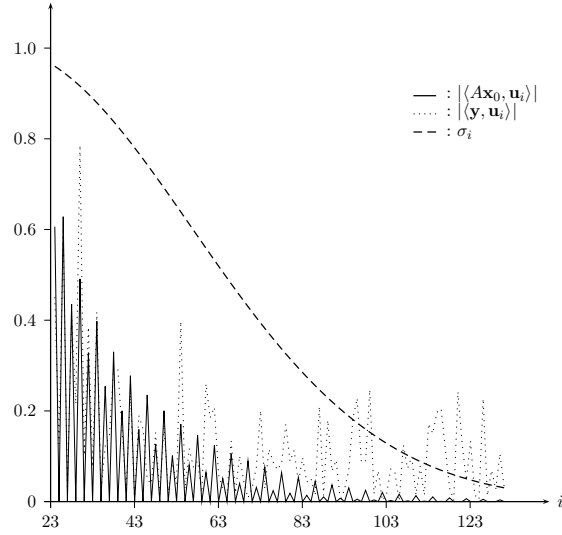


FIGURE 1.4 – La condition de Picard discrète est violée par les composantes du second membre bruité  $\mathbf{y}$ . En effet, ceux-ci ne décroissent plus, en moyenne, à partir de  $i \approx 50$

Bien sûr cette interprétation est fortement liée au caractère régularisant supposé de l'opérateur  $A$ , et la violation de la CPD ne saurait suffire dans l'étude du conditionnement d'un problème. Néanmoins, couplée avec l'étude des valeurs et des espaces propres, elle peut fournir une aide précieuse dans le choix de la stratégie à adopter pour l'inversion.

*Remarque 1.2.1.* Dans un cadre de dimension infinie, un grand nombre de problèmes inverses impliquent un opérateur  $\mathcal{A}$  compact et autoadjoint qui admet alors une base hilbertienne de vecteurs propres associés à des valeurs propres décroissant vers 0 (voir l'annexe A). Dans ce cas on peut appliquer une étude du conditionnement semblable à celle proposée ici.

#### 1.2.4 Moindres carrés, inverse de Moore-Penrose

Outre l'approche algébrique que nous venons d'envisager, le problème (1.1) peut être résolu en dimension infinie au sens de la meilleure approximation. Le problème inverse prend alors la forme d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle correctement choisie. Dans un cadre hilbertien la première fonctionnelle venant à l'esprit est sans doute la norme du résidu, on parle alors de résolution au sens des *moindres carrés*.

Supposons ici que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  soient deux espaces de Hilbert munis de produits scalaires notés respectivement  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{G}}$ . On notera  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{G}}$  les normes correspondantes.

**Définition 1.2.3** (Moindres Carrés). On dit que l'on résout  $\mathcal{A}f = g$  au sens des moindres carrés lorsque l'on résout :

$$(\mathcal{L}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \|g - \mathcal{A}f\|_{\mathcal{G}}^2, \\ \text{s.c.} \quad f \in \mathcal{F}, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

associé, éventuellement, à une contrainte.

Plaçons-nous dans la situation où  $\mathcal{A}$  est linéaire et continu, dans laquelle le problème d'optimisation est différentiable et convexe, néanmoins les ensembles de niveaux de la fonctionnelle ne sont pas forcément bornés et il

n'est donc pas possible en général d'assurer l'existence d'une solution. Cependant, lorsque  $g \in \text{ran } \mathcal{A} \oplus (\text{ran } \mathcal{A})^\perp$ , condition automatiquement vérifiée quand  $\text{ran } \mathcal{A}$  est fermée, on peut projeter  $g$  sur  $\text{ran } \mathcal{A}$  via la projection orthogonale canonique  $\mathcal{P}$ . Dès lors la proposition qui suit, de démonstration directe grâce à l'identité  $(\text{ran } \mathcal{A})^\perp = \ker \mathcal{A}^*$ , permet de lier le problème des moindres carrés à un contournement naturel du défaut de surjectivité de l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

**Proposition 1.2.1.** *Si  $g \in \text{ran } \mathcal{A} \oplus (\text{ran } \mathcal{A})^\perp$  et  $f_0 \in \mathcal{F}$ , alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- i.  $\mathcal{P}g = \mathcal{A}f_0$  ;
- ii.  $f_0 = \text{argmin} \{ \|f - \mathcal{A}g\|_{\mathcal{G}} \mid f \in \mathcal{F} \}$  ;
- iii.  $\mathcal{A}^*g = \mathcal{A}^*\mathcal{A}f_0$ .

L'équation *iii* s'appelle *l'équation normale* associée au problème, elle correspond à une CNS d'optimalité du problème de moindres carrés (voir l'annexe A pour de rapides rappels à ce sujet).

Ainsi, dans le cas favorable et nécessaire où  $g \in \text{ran } \mathcal{A} \oplus (\text{ran } \mathcal{A})^\perp$ , nous venons de voir que  $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{P}g)$  était non vide et que

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{P}g) = \{f \in \mathcal{F} \mid \mathcal{A}^*g = \mathcal{A}^*\mathcal{A}f\}$$

donc  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{P}g$  est un sous-espace affine parallèle à  $\ker \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \ker \mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{A}$  n'est pas injectif, la condition d'unicité d'Hadamard n'est donc pas vérifiée et il est nécessaire d'introduire une information *a priori* dans le problème afin de choisir un représentant dans  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{P}g$  selon un critère prédéfini. Un choix possible est de sélectionner l'élément de plus petite norme, c'est à ce choix que correspond la définition de *l'inverse généralisé*.

**Définition 1.2.4** (inverse généralisé). Soit  $\mathcal{A}_\circ$  l'application obtenue en restreignant  $\mathcal{A}$  à  $(\ker \mathcal{A})^\perp \subset \mathcal{F}$  et à  $\text{ran } \mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ , alors cette application est bijective par construction et nous définissons l'*inverse généralisé*  $\mathcal{A}^\dagger$  de  $\mathcal{A}$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\dagger: \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger) &\longrightarrow \mathcal{F} \\ g &\longmapsto \mathcal{A}^\dagger g := \mathcal{A}_\circ^{-1} \mathcal{P}g, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger) := \text{ran } \mathcal{A} \oplus (\text{ran } \mathcal{A})^\perp = \text{ran } \mathcal{A} \oplus \ker \mathcal{A}^*$  est le *domaine* de l'inverse généralisé. L'opérateur  $\mathcal{A}^\dagger$  est également appelée l'inverse de Moore-Penrose de  $\mathcal{A}$ . Quand  $\mathcal{A}$  est inversible on a évidemment  $\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}^{-1}$ .

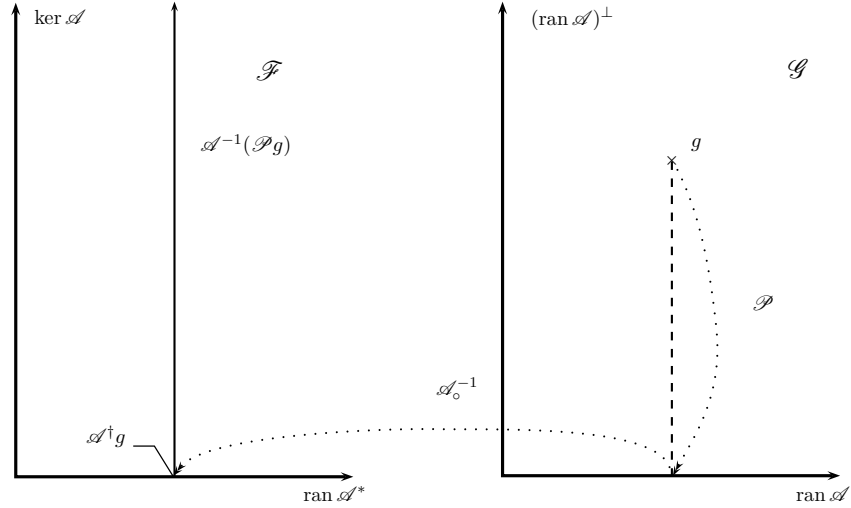


FIGURE 1.5 – L'inverse généralisé revient à choisir l'élément de moindre norme dans  $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{P}g)$ .

La formule de Pythagore assure que le choix de l'inverse généralisé revient à choisir le représentant de moindre norme. Le schéma 1.5 illustre ce fait.

Du point de vue numérique, l'équation normale discrétisée  $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{y}$  est très proche de l'équation originale (1.2) et elle est *a priori* soumise aux mêmes problèmes de conditionnement. En outre, le choix de la moindre norme induit par l'inverse généralisé n'a aucune raison d'atténuer les effets soulignés dans la section précédente. Cependant l'approche variationnelle, dont les moindres carrés peuvent être considérés comme une brique de base, peut se révéler féconde en solutions de stabilisation du problème inverse (1.1).

### 1.2.5 Méthodes de régularisation

Nous avons vu que l'inverse généralisé, qui fournit au moins une heuristique pour contourner les défauts d'injectivité et de surjectivité de  $\mathcal{A}$ , était solution de :

$$(\mathcal{P}_{\dagger}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \|f\|_{\mathcal{F}}^2, \\ \text{s.c.} \quad \mathcal{A}^* \mathcal{A} f = \mathcal{A}^* g \in \mathcal{F}. \end{array} \right.$$

Cependant, la contrainte de ce problème n'est pas numériquement acceptable, pour des raisons déjà explicitées. C'est pourquoi il est naturel de *relâcher la contrainte*, et le problème relaxé s'écrit alors :

$$(\mathcal{P}_\alpha) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \|\mathcal{A}f - g\|_{\mathcal{G}}^2 + \frac{\alpha}{2} \|f\|_{\mathcal{F}}^2, \\ \text{s.c.} \quad f \in \mathcal{F}. \end{array} \right.$$

On voit apparaître un coefficient  $\alpha > 0$  qui gouverne la balance entre deux termes. Le premier terme est un terme d'attache aux données et le deuxième un terme qui traduit un certain a priori introduit dans le problème. Pour des raisons que nous allons aborder,  $\alpha$  est appelé *paramètre de régularisation* et  $\|f\|^2$  le *terme de régularisation*.

Le problème  $(\mathcal{P}_\alpha)$  est évidemment différentiable et convexe, de plus il est coercif et chaque solution  $f_\alpha$  vérifie la CNS d'optimalité suivante :

$$\mathcal{A}^* \mathcal{A} f_\alpha - \mathcal{A}^* g + \alpha f_\alpha = 0. \quad (1.6)$$

En outre, le lemme de H. Everett (voir l'annexe A) assure qu'alors  $f_\alpha$  est également solution du problème contraint :

$$(\mathcal{P}_\alpha^c) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \|\mathcal{A}f - g\|_{\mathcal{G}}^2, \\ \text{s.c.} \quad \|f\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \varepsilon_\alpha, \end{array} \right.$$

où  $\varepsilon_\alpha := \|f_\alpha\|_{\mathcal{F}}^2$ . Ainsi la relaxation de la contrainte revient à chercher une image  $f$  donnant un résidu faible et de norme contrôlée, de manière indirecte, par le paramètre  $\alpha$ . Deux questions restent à résoudre :

- En quoi est-ce qu'exiger une norme faible revient à stabiliser l'inversion du problème ?
- Et si c'est bien le cas,  $\varepsilon_\alpha$  peut-il exercer un bon contrôle sur cette norme ?

Pour y apporter quelques éléments de réponse, plaçons-nous dans la situation où  $\mathcal{A}$  est un opérateur compact. Dès lors  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$  est compact autoadjoint et nous disposons d'une base hilbertienne  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  de vecteurs propres associés à une suite de valeurs propres  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  décroissant vers 0 (voir l'annexe A). Ce comportement conduit évidemment à un problème inverse mal posé en dimension infinie et mal conditionné après discrétisation (voir la section 1.2.3). Cependant l'opérateur  $\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ ,  $\alpha > 0$ , est, quant à lui, inversible et d'inverse continu. Par conséquent le problème  $(\mathcal{P}_\alpha)$  admet une unique solution  $f_\alpha = (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha \mathcal{I}_{\mathcal{F}})^{-1} \mathcal{A}^* g$  qui dépend continûment

des données  $g$  : il est à présent bien posé. Ainsi le paramètre  $\alpha$  opère bien une régularisation du problème de moindres carrés original en décalant le spectre de l'opérateur. Qu'en est-il du contrôle de la norme par  $\varepsilon_\alpha$  ? Revenons pour cela au problème d'inversion de la chaleur discrétisé abordé dans la section 1.2.3. Dans ce cas encore, le décalage du spectre va éviter de devoir diviser par des valeurs singulières trop petites. Plus précisément, ici on a :

$$\varepsilon_\alpha = \left\| (A_{conv}^T A_{conv} + \alpha I_n)^{-1} A_{conv}^T \mathbf{y} \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle}{\sigma_i + \frac{\alpha}{\sigma_i}} \right|^2,$$

et les termes de la dernière somme seront négligeables dès que  $\sigma_i \ll \alpha$ . Au vu de la condition de Picard discrète, il semble raisonnable d'imposer

$$\varepsilon_\alpha \approx \sum_{i=1}^{n_0} \left| \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle}{\sigma_i + \frac{\alpha}{\sigma_i}} \right|^2,$$

où  $n_0$  est le rang à partir duquel, en moyenne,  $|\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle| > \sigma_i$ . Avec un bruit relatif moyen de 10% on repère  $n_0 = 100$ , qui correspond à  $\sigma_{n_0} = 0,08856$ . Les figures 1.6 et 1.7 illustrent ce choix.

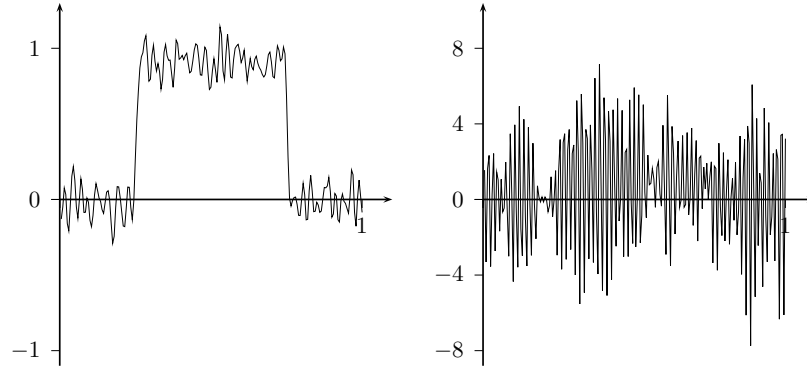


FIGURE 1.6 – Solution de  $(\mathcal{P}_\alpha)$  pour  $\alpha = 0,08856$  (gauche) et  $\alpha = 0$  (droite).

On voit bien que le problème des moindres carrés reste très instable et que l'introduction du terme de régularisation améliore le résultat. De plus l'heuristique présenté pour le choix de  $\alpha$  et son influence présumée semble validée par la figure 1.7. Néanmoins le résultat obtenu pour le meilleur des paramètres  $\alpha$  n'est pas totalement satisfaisant. En effet le paramètre ne semble pas suffisamment grand pour amortir les oscillations encore visibles, et le choix d'une valeur plus importante fait perdre trop d'énergie à la solution



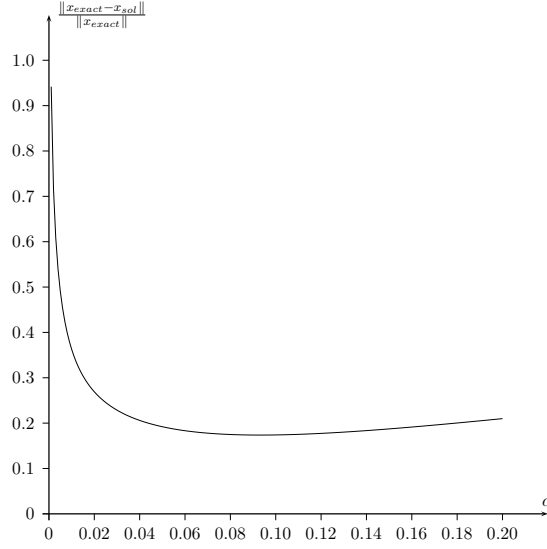


FIGURE 1.7 – Influence du paramètre de régularisation  $\alpha$  sur l'erreur relative, l'optimum est atteint pour  $\alpha \approx 0,093$ .

qui, bien qu'elle tende à prendre le profil d'une fonction plateau, a une valeur maximale qui tend vers 0 quand  $\alpha$  grandit. On touche là au principal défaut de ce type de régularisation qui contraint sans discrimination tous les espaces propres de l'opérateur, alors que nous avons vu que seuls les espaces propres correspondant aux hautes fréquences causent régulièrement souci.

La méthode de régularisation dont nous venons d'étudier certains aspects, et habituellement appelé *régularisation de Tikhonov*, n'est qu'un cas particulier d'une méthode plus générale de régularisation introduite par Andrei Nikolaiévitch Tikhonov (1906 – 1993, Russie) et qui proposa d'approcher la solution d'un problème inverse via la minimisation de fonctionnelles du type :

$$\mathcal{T}_{\alpha, g^\delta}(f) := \rho^2(\mathcal{A}f, g^\delta) + \alpha \mathcal{R}(f),$$

avec  $\rho$  une fonctionnelle mesurant un écart entre  $\mathcal{A}f$  et  $g^\delta$ ,  $\alpha > 0$  et  $\mathcal{R}$  une fonctionnelle positive. Ici l'exposant  $\delta > 0$  dans  $g^\delta$  fait référence à une quantité de bruit présente dans les données, soit :

$$\|g_{exact} - g^\delta\| \leq \delta.$$

Usuellement,  $\mathcal{R}(f) = \mathcal{D}(f, f_0)$  où  $\mathcal{D}$  est une distance, éventuellement issue d'une norme, et  $f_0$  une ébauche de l'image dont les propriétés sont four-

nies par le modèle ou bien par une autre méthode. On pourra se référer à l'ouvrage de Morozov [67] pour une présentation plus détaillée de ce type de méthodes. Notons que celles-ci peuvent être notablement améliorées par l'utilisation d'un procédé itératif du type :

$$f_{\alpha}^{k+1} := \operatorname{argmin} \left\{ \mathcal{T}_{\alpha_k, g^{\delta}}^k(f) \mid f \in \mathcal{F} \right\},$$

$$\mathcal{T}_{\alpha_k, g^{\delta}}^k := \rho^2 \left( \mathcal{A}f, g^{\delta} \right) + \alpha_k \mathcal{D} \left( f, f_{\alpha}^k \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Les résultats sont nombreux sur ces méthodes et je n'ai pas pour but ici d'en faire la liste. Le lecteur curieux pourra se faire une bonne idée de ceux déjà existants dans [77, 22, 23, 33, 84, 79].

De manière générale on appellera *méthode de régularisation* pour un problème inverse :

$$\mathcal{A}f = g^{\delta},$$

avec

$$\exists f_0 \in \mathcal{F}, \quad \left\| g^{\delta} - \mathcal{A}f_0 \right\| \leq \delta,$$

toute suite de problèmes approchés bien posés (et si possible bien conditionnés) dépendant de paramètres  $\alpha := (\alpha_k)$  et fournissant une suite de solutions approchées  $f_{\alpha, g^{\delta}}$  vérifiant :

$$f_{\alpha, g^{\delta}} \xrightarrow{\alpha, \delta \rightarrow 0} f_0$$

et

$$f_{\alpha, g^{\delta}} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}^{-1}g^{\delta}$$

lorsque ce dernier terme existe.

La qualité d'une méthode de régularisation sera jugée au conditionnement des problèmes approchés (c'est-à-dire à sa stabilité), à son taux de convergence et à la capacité des solutions approchées à conserver certaines propriétés essentielles fournies par le modèle.

## Annexe A

# Suppléments

### A.1 Décomposition en valeurs singulières

Dans toute cette section  $H$  et  $G$  désigneront deux espaces de Hilbert séparables. En particulier, pour l'application des résultats suivants en dimension finie, on pourra penser  $H$  et  $G$  comme étant  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ , pour deux entiers  $n$  et  $m$ , et les opérateurs linéaires entre ces espaces comme des matrices de  $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ . On pourra se référer à [14] pour les démonstrations.

**Définition A.1.1** (Base hilbertienne). Une suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H$  est appelée *base hilbertienne* si et seulement si :

- (i)  $\|e_n\|_H = 1$ , et  $\langle e_n, e_m \rangle_H = 0$ ,  $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$  ;
- (ii) L'espace vectoriel engendré par les  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $H$ .

**Théorème A.1.1.** *Tout espace de Hilbert séparable (i.e. admettant un sous-ensemble dense et dénombrable) admet une base hilbertienne.*

Passons à la décomposition spectrale des opérateurs compacts autoadjoints.

**Définition A.1.2** (Opérateur compact). Un opérateur  $T \in \mathcal{L}(H, G)$  est dit compact si et seulement si l'image par  $T$  de la boule unité de  $H$  est relativement compacte dans  $G$ . On note leur ensemble  $\mathcal{K}(H, G)$ , avec  $\mathcal{K}(H) := \mathcal{K}(H, H)$ .

**Théorème A.1.2.** *Le spectre d'un opérateur compact  $T \in \mathcal{K}(H)$  est soit fini, soit formé d'une suite convergent vers 0 (augmentée éventuellement de 0).*

**Théorème A.1.3.** *Si  $H$  est séparable et  $T \in \mathcal{K}(H)$  autoadjoint, alors  $H$  admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de  $T$ .*

À présent si  $T \in \mathcal{K}(H, G)$  alors  $T^*T \in \mathcal{K}(H)$  est autoadjoint et l'on dispose d'une base hilbertienne de  $H$  formée de vecteurs propres de  $T^*T$ , notés  $e_i$  et associés aux valeurs propres  $s_i \geq 0$ . Soit  $I := \{i \in \mathbb{N} \mid s_i \neq 0\}$ , il est alors facile de voir qu'en complétant la famille  $(f_j := \frac{1}{s_j}T(e_j))_{j \in I}$  par une base hilbertienne de  $(\text{ran}(T))^\perp$  on obtient une base hilbertienne de  $G$ . Ainsi pour tout élément  $u \in H$  s'écrivant :

$$u = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i e_i, \quad u_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N},$$

on a

$$T(u) = \sum_{i \in I} s_i u_i f_i.$$

Finalement on a le

**Corollaire A.1.4** (SVD d'une matrice). *Soit  $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ ,  $m \leq n$ , alors il existe  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$ ,  $U \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$  et  $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  tels que :*

$$A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} V^T.$$

## A.2 Éléments d'optimisation

Je rappelle ici les principaux résultats d'existence et de conditions d'optimalité connus concernant le problème :

$$(\mathcal{P}_{opt}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x), \\ \text{s.c. } x \in \mathcal{C}, \end{array} \right.$$

où  $f : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est une application définie et *convexe* sur un sous-ensemble *ouvert convexe*  $C$  d'un espace de Hilbert  $H$ . On supposera de plus  $f$  *différentiable* sur  $C$ . Enfin l'ensemble  $\mathcal{C}$  est inclus dans  $C$  et représente un ensemble de contraintes imposées à la solution. Tous les résultats, et bien d'autres, peuvent être trouvés dans [11] ; pour aller plus loin, on pourra se référer à [13].

## Optimisation sans contrainte

Dans ce paragraphe nous considérons le cas où  $\mathcal{C} = C$ . L'existence d'une solution repose sur la compacité des ensembles de niveaux  $\{x \in C \mid f(x) \leq \alpha\}$  et sur l'application du théorème suivant.

**Théorème A.2.1** (Bolzano – Weierstrass). *Toute application continue à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes sur tout compact.*

En dimension finie, cette compacité est fournie par la continuité de  $f$  (une semi-continuité inférieure suffit), assurant que les ensembles de niveaux sont fermés, et par une propriété fournissant le caractère borné de ces mêmes ensembles, par exemple la coercivité :

**Définition A.2.1** (Coercivité). L'application  $f$  est dite :

- *0-coercive* si  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ;
- *1-coercive* si  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$  ;
- *coercive* si  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} > 0$ .

On a par exemple :

**Proposition A.2.2.** *Si  $f$  est 0-coercive, alors ses ensembles de niveaux sont bornés. Si  $f$  est convexe, on a l'équivalence entre la coercivité de  $f$  et le caractère borné de ses ensembles de niveaux.*

La convexité est également utile pour l'équivalence qu'elle induit entre minimiseurs locaux et globaux, quant à l'unicité de la solution, elle peut être fournie par la stricte convexité de  $f$ .

Il est également important de disposer de conditions, nécessaires ou suffisantes, pour qu'un point  $\bar{x} \in C$  soit un minimiseur de  $f$ .

**Théorème A.2.3** (CNS d'optimalité du premier ordre). *Les conditions suivantes sont équivalentes dans un cadre convexe et différentiable :*

- (i)  $\bar{x}$  est un minimiseur global de  $f$  sur  $C$  ;
- (ii)  $\bar{x}$  est un minimiseur local de  $f$  ;
- (iii)  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ .

## Optimisation avec contraintes

Nous considérons à présent que l'ensemble des contraintes  $\mathcal{C}$  est défini par des conditions d'égalités et d'inégalités du type :

$$\mathcal{C} := \{x \in C \mid h_1(x) = \dots = h_m(x) = 0, \text{ et } g_1(x) \geq 0, \dots, g_p(x) \geq 0\},$$

pour des fonctions  $(h_i)_{1 \leq i \leq m}$  et  $(g_j)_{1 \leq j \leq p}$  continûment différentiables sur  $H$ .

En outre pour un élément  $\bar{x} \in \mathcal{C}$  on définit la condition suivante :

**Définition A.2.2** (Qualification des contraintes). On dit que  $\bar{x}$  satisfait la condition de Mangasarion-Fromovitz si et seulement si :

$$(QC)_{\bar{x}} \quad \begin{cases} (i) & \text{Il existe } d_0 \in H \text{ tel que } \langle \nabla h_i(\bar{x}), d_0 \rangle = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \\ & \text{et } \langle \nabla g_j(\bar{x}), d_0 \rangle < 0 \text{ pour tout } j \text{ vérifiant } g_j(\bar{x}) = 0; \\ (ii) & \text{La famille } (\nabla h_i(\bar{x}))_{1 \leq i \leq m} \text{ est linéairement indépendante.} \end{cases}$$

On a le principal résultat suivant :

**Théorème A.2.4** (Karush-Kuhn-Tucker). *Si  $\bar{x}$  est un minimum local de  $f$  sur  $\mathcal{C}$ , et si  $\bar{x}$  satisfait  $(QC)_{\bar{x}}$ , alors il existe  $\bar{\lambda} := (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^m$  et  $\bar{\mu} := (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_p) \in \mathbb{R}^p$  tels que :*

$$\begin{aligned} (i) & \quad \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^p \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0; \\ (ii) & \quad \bar{\mu}_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq p; \\ (iii) & \quad \bar{\mu}_j = 0 \text{ dès que } g_j(\bar{x}) < 0. \end{aligned}$$

*De plus, dans une situation convexe, où les fonctions  $h_i$  sont affines et les fonctions  $g_j$  convexes, les conditions (i), (ii) et (iii) deviennent suffisantes.*

La condition (i) peut s'écrire :

$$\nabla_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: \quad C \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_+)^p & \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ (x, \lambda, \mu) & \longmapsto f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(x) \end{aligned}$$

est appelé le *lagrangien* associé au problème de minimisation :

$$(\mathcal{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{s.c. } h_i(x) = 0, \quad g_j(x) \leq 0. \end{array} \right.$$

Les coefficients  $\bar{\lambda}$  et  $\bar{\mu}$  sont appelés les *multiplieurs de Lagrange*. Notons que la qualification des contraintes imposées ici assure qu'aucun coefficient n'intervient devant  $\nabla f(\bar{x})$  dans la condition (i). En effet si celui-ci était nul le théorème n'apporterait qu'une information très pauvre sur le minimiseur  $\bar{x}$ .

Le lemme suivant est de démonstration directe.

**Lemme A.2.5** (H. Everett). *Soit  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_+)^p$  et  $x_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}}$  un minimiseur de  $\mathcal{L}(\cdot, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  sur  $C$ . Alors  $x_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}}$  est solution de :*

$$\left| \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{s.c. } h_i(x) = \varepsilon_i, \forall i \in I, \quad g_j(x) \leq \varepsilon'_j, \forall j \in J, \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} I &:= \{i \mid \bar{\lambda}_i \neq 0\} \quad \text{et} \quad \varepsilon_i := h_i(x_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}}), \forall i \in I, \\ J &:= \{j \mid \bar{\mu}_j > 0\} \quad \text{et} \quad \varepsilon'_j := g_j(x_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}}), \forall j \in J. \end{aligned}$$





## Chapitre 2

# La tomographie thermoacoustique

### 2.1 Modélisation

#### 2.1.1 Principe

Les faibles capacités de contraste pour les tissus souples, sans compter la nocivité potentielle, du scanner à rayons X ont conduit au développement récent de nouvelles techniques d'imagerie médicale. Si l'IRM reste une méthode efficace et au potentiel encore mal défini aujourd'hui, le coût et l'encombrement du matériel qu'elle requiert font encore obstacle à sa généralisation. La Tomographie ThermoAcoustique (TTA), aussi appelée optoacoustique ou photoacoustique, est une technique d'imagerie hybride émergente dont le premier prototype clinique a été mis au point par Kruger en 1998 [47, 48], et elle a fait depuis l'objet d'études intensives aussi bien sur les plans médicaux et physiques que mathématiques [89, 56, 87]. Le principe en est simple : les tissus à imager sont illuminés par une impulsion électromagnétique radiofréquence ; en absorbant cette énergie les tissus se réchauffent et subissent une expansion non uniforme générant une onde de pression acoustique, recueillie autour du corps par des détecteurs appropriés. La figure 2.1 illustre un exemple de dispositif expérimental avec des microphones piézoélectriques. La méthode repose sur la possibilité de distinguer les différents types de tissus présents dans le corps humain en identifiant leur capacité à absorber l'impulsion électromagnétique originale. En effet elle consiste à reconstruire

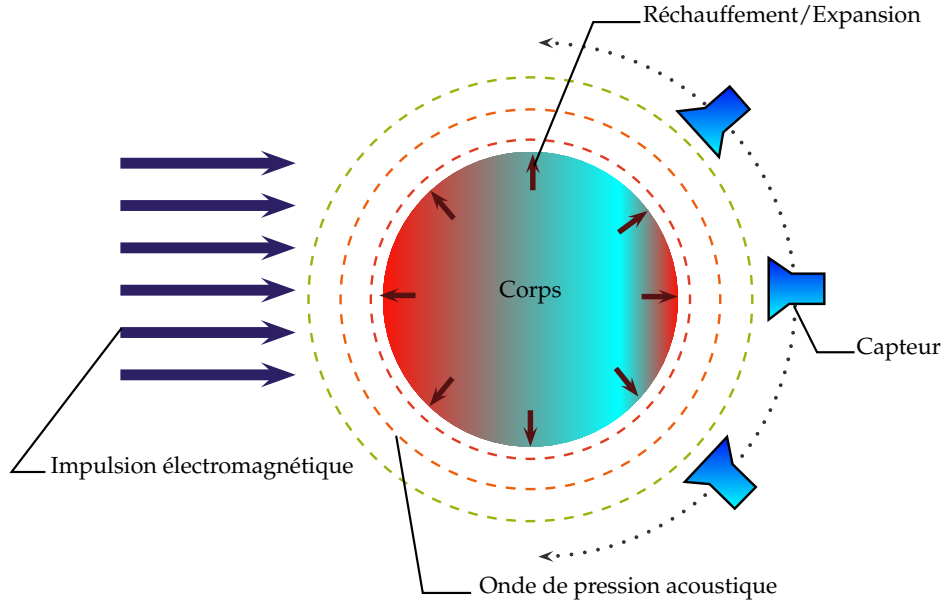


FIGURE 2.1 – La TTA : le corps, illuminé, restitue une onde acoustique recueillie par les capteurs.

la carte de l'absorptivité de toutes les régions du corps grâce à l'enregistrement de l'onde de pression générée. Or les études réalisées montrent que cette caractéristique est porteuse d'excellentes capacités de contraste. Par exemple un laser émettant dans la région des proches infra-rouges ( $\approx 1\text{THz}$ ) produit des coefficients d'absorption variant du simple au quintuple dans les tissus souples humains ([45]). En particulier, les tissus cancéreux, mieux vascularisés, sont facilement distinguables, même dans les stades les moins avancés. En outre la richesse spectrale du signal acoustique produit permet, selon la méthode de détection choisie, des résolutions allant de  $0,5\text{mm}$  à  $100\mu\text{m}$  ([7, 74, 88]).

Du fait de la relative jeunesse du procédé et du manque d'expérience clinique, il n'existe pas à proprement parler *un* modèle de la TTA. Néanmoins, les différences entre les modèles existants résident principalement dans le degré de simplification des phénomènes générant l'onde acoustique et dans le dispositif de mesure privilégié. C'est pourquoi j'essaierai ici d'établir quelques modèles qui donneront une idée de la variété existante.

### 2.1.2 La génération de l'onde de pression

Dans ce qui suit nous allons dériver l'équation des ondes qui décrit le principe physique de la TTA. Les principales grandeurs physiques intervenant sont décrites dans la table 2.1. Nous supposons que l'objet à scanner est assimilable à un *fluide non visqueux, isotrope et homogène*, ce qui pour des applications cliniques, telles que la détection des tumeurs dans des tissus souples, représente une approximation sensée puisqu'une grande partie du corps humain est composée d'eau. Dans un premier temps nous établissons une relation entre la *densité*  $\rho$  et la *pression acoustique*  $\mathbf{p}$ . Deux équations

Symbole	Ordre de grandeur	Signification
$v_s$	1500m/s	vitesse du son dans l'eau
$\hat{t}$	10 – 100 $\mu$ s	variable physique de temps
$t = \hat{t}v_s$	1mm – 10cm	variable temporelle normalisée
$\tau_{em}$	< ns	durée de l'impulsion laser
$\beta(x)$	$\approx 4 \times 10^{-4} K^{-1}$	coefficient d'expansion isobare
$c_p(x)$	$\approx 4 \times 10^3 J/(Kkg)$	capacité calorifique
$\mu_{abs}(x)$	0.1 – 0.5cm $^{-1}$	coefficient d'absorption

TABLE 2.1 – Principales variables physiques

tions de mécanique des fluides nous servent ici de point de départ (voir par exemple [24]) :

- L'équation de continuité linéarisée

$$\frac{\partial \rho}{\partial \hat{t}}(x, \hat{t}) = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}(x, \hat{t}) \quad (2.1)$$

est obtenue à partir du principe de *conservation de la masse* si la *vitesse particulaire*  $\mathbf{v}(x, \hat{t})$  est petite et si la densité totale  $\rho_{tot}(x, \hat{t}) = \rho_0 + \rho(x, \hat{t})$  varie faiblement, i.e.  $|\rho(x, \hat{t})| \ll \rho_0$ .

- L'équation d'Euler linéarisée

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \hat{t}}(x, \hat{t}) = -\nabla \mathbf{p}(x, \hat{t}) \quad (2.2)$$

est tirée du principe de *conservation de la quantité de mouvement* pour un flot *non visqueux et non turbulent* en l'absence de forces externes et pour une pression totale  $\mathbf{p}_{tot}(x, \hat{t}) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}(x, \hat{t})$  variant faiblement, i.e.  $|\mathbf{p}(x, \hat{t})| \ll \mathbf{p}_0$ .

En dérivant (2.1) par rapport au temps et en appliquant le gradient à (2.2), nous obtenons l'équation de mouvement qui relie la pression acoustique à la densité :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\rho}}{\partial \hat{t}^2}(x, \hat{t}) = \Delta \mathbf{p}(x, \hat{t}). \quad (2.3)$$

L'hypothèse que l'objet est exposé à une impulsion électromagnétique courte implique que l'intensité de la radiation électromagnétique  $I_{em}$  est donnée par

$$I_{em}(x, \hat{t}) = J(x)j(\hat{t}), \quad (2.4)$$

où  $j$  et  $J$  représentent respectivement les distributions temporelle et spatiale de l'intensité. L'équation (2.4) tient compte du fait que l'échelle de grandeur de la vitesse de la lumière permet de négliger le délai d'illumination entre les différentes parties de l'objet. Pour une exposition laser la fonction  $j$  a un petit support  $[0, \tau_{em}]$  avec une durée d'impulsion  $\tau_{em}$  de l'ordre de quelques *ps*. La *puissance électromagnétique absorbée* est fournie par

$$r(x, \hat{t}) = I_{em}(x, \hat{t})\mu_{abs}(x), \quad (2.5)$$

où le coefficient d'absorption  $\mu_{abs}(x)$  décrit la capacité du fluide à absorber l'énergie issue de l'exposition. L'absorption d'une énergie électromagnétique entraîne un réchauffement.

En TTA la variable  $\tau_{em}$  est très petite et les effets de la diffusion thermique peuvent être négligés. En conséquence, la variation  $(\partial T / \partial \hat{t})(x, \hat{t})$  par unité de temps est proportionnelle à l'énergie absorbée, *i.e.* :

$$\frac{\partial T}{\partial \hat{t}}(x, \hat{t}) = \frac{r(x, \hat{t})}{c_p(x)}.$$

Ici,  $c_p(x)$  représente la *capacité thermique spécifique*, qui fournit la quantité d'énergie nécessaire pour augmenter la température d'une substance de un degré.

Le réchauffement induit une *expansion* (diminution de la densité) et une augmentation de pression. La relation entre ces trois phénomènes est exprimée par l'*équation d'expansion linéarisée*

$$\frac{\beta(x)r(x, \hat{t})}{c_p(x)} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \hat{t}}(x, \hat{t}) - \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \hat{t}}(x, \hat{t}), \quad (2.6)$$

où  $v_s$  est la vitesse du son et  $\beta(x)$  le coefficient d'expansion thermique, qui exprime l'augmentation de volume si la température augmente de un degré

Kelvin. Nous supposons, comme il est fait généralement, que la vitesse du son est constante à l'intérieur de l'échantillon étudié.

En dérivant (2.6) par rapport au temps et en insérant (2.3) nous trouvons

$$\frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \hat{t}^2}(x, \hat{t}) - \Delta \mathbf{p}(x, \hat{t}) = \frac{dj(\hat{t})}{d\hat{t}} \left( \frac{\mu_{abs}(x)\beta(x)J(x)}{c_p(x)} \right). \quad (2.7)$$

L'hypothèse selon laquelle la pression acoustique est nulle avant l'exposition de l'objet à l'impulsion se traduit par des conditions initiales homogènes :

$$\mathbf{p}(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \hat{t}}(x, 0) = 0. \quad (2.8)$$

Lors d'une expérience avec une illumination laser la durée  $\tau_{em}$  de l'impulsion électromagnétique est d'à peu près  $20ps$  et la vitesse du son  $v_s$  dans les tissus est de  $1.5 \text{ nm/ps}$ . Ainsi la fonction  $j$  peut être remplacée dans les calculs par une distribution de Dirac, tout du moins tant que nous ne nous intéressons pas à des résolutions spatiales inférieures à  $20 \times 1.5 = 30nm$ .

En utilisant cette approximation, le principe de Duhamel [17], appliqué à l'équation inhomogène (2.7) et aux conditions initiales (2.8), établit que la solution  $\mathbf{p}$  est finalement solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}(x, t) - v_s^2 \Delta \mathbf{p}(x, t) = 0, \\ \mathbf{p}(x, 0) = u(x) := \frac{\mu_{abs}(x)\beta(x)J(x)v_s^2}{c_p(x)}, \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Et en normalisant  $t := v_s \hat{t}$  puisqu'ici  $v_s$  est supposée constante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}(x, t) - \Delta \mathbf{p}(x, t) = 0, \\ \mathbf{p}(x, 0) = u(x) := \frac{\mu_{abs}(x)\beta(x)J(x)v_s}{c_p(x)}, \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Ce problème de Cauchy fournit le modèle direct le plus souvent utilisé pour la TTA : à partir d'une pression initiale  $u(x)$ , dont la seule composante inconnue est le coefficient d'absorption  $\mu_{abs}(x)$ , la TTA fournit une onde de pression acoustique  $\mathbf{p}$  gouvernée par une équation des ondes homogène que l'on peut mesurer à l'extérieur du corps.

*Remarque 2.1.1* (Approximations du modèle). Un grand nombre d'approximations ont été faites tout au long de ce calcul. Trois me semblent être à questionner en priorité :

- L'homogénéité de l'illumination : selon leur longueur d'onde, les ondes électromagnétiques ont une capacité variable à pénétrer les tissus mous, et de vraies difficultés sont constatées expérimentalement. Cependant il n'existe pas à ma connaissance de modèle établi prenant en compte une illumination non homogène du corps.
- L'homogénéité du corps : les ondes ultrasonores sont réfléchies en partie lorsqu'elles atteignent des interfaces entre deux milieux d'impédances différentes, c'est d'ailleurs le principe de l'échographie. Or il y a une grande différence d'impédance entre les tissus mous d'un côté, et l'air et les os de l'autre, pouvant produire une réflexion de 60% de l'onde émise. En ce qui concerne l'air, le corps peut être plongé dans de l'eau afin que l'effet soit pratiquement éradiqué. Cependant, aucune astuce de ce type ne peut être employée pour les os (les côtes par exemple pour les mammographies), alors qu'il serait préférable de les inclure dans le modèle.
- La viscosité du milieu : l'équation des ondes obtenue ici est non atténuée, en partie parce qu'aucune viscosité n'a été introduite dans l'équation (2.2). Or les tissus mous ont sur cet aspect un comportement fortement similaire à l'eau, qui atténue significativement les hautes fréquences.

*Remarque 2.1.2* (Vitesse du son). Certains travaux sur la TTA sont applicables avec une vitesse du son variable, bien qu'elle ne soit que rarement considérée comme une inconnue du problème. Il faut cependant dans ces cas-là supposer qu'elle est connue partout dans le corps, ce qui ne semble pas cohérent avec les applications.

Nous allons à présent introduire les deux principaux dispositifs de mesure utilisés et les problèmes inverses précis qu'ils produisent.

### 2.1.3 Capteurs quasi-ponctuels

L'approche standard en TTA consiste à mesurer l'onde de pression acoustique à l'aide de capteurs piézoélectriques disposés sur une surface entourant le corps. La plupart des modélisations existantes considèrent ces capteurs comme étant ponctuels, bien qu'il soit aisé de prendre en compte leur surface de mesure effective. Bien évidemment en pratique on ne peut placer qu'un nombre fini de détecteurs autour du corps, et la plupart du temps il est impossible d'en disposer tout autour de la personne, néanmoins il nous arrivera

de passer outre ces limitations en élaborant le cadre théorique, qui souvent nécessite des données complètes (*cf* les formules d'inversion exactes). Notons que de manière générale l'échantillonnage en temps n'est pas abordé car les capacités des différents détecteurs sont excellentes sur ce plan.

En accord avec le modèle élaboré dans la section précédente, supposons que l'on cherche à reconstruire une application  $u$  à support dans la boule unité notée  $B(0, 1)$ . Soit  $\Omega$  un ouvert borné contenant  $B(0, 1)$  et  $\partial\Omega$  sa frontière. Notons finalement  $\mathcal{S}$  un sous-ensemble (strict en pratique) de  $\partial\Omega$ . Le problème inverse de la TTA dans ce cadre consiste à reconstruire  $u$  à partir de la connaissance de  $\{\mathbf{p}(x, t) | x \in \mathcal{S}, t \in \mathbb{R}_+\}$ , où  $\mathbf{p}$  est solution de (2.10). Il s'agit donc d'un problème de reconstruction d'une condition initiale à partir d'observations restreintes à une surface.

Or la formulation usuelle de la solution de cette équation des ondes permet d'écrire ce problème inverse sous la forme de l'inversion d'un opérateur linéaire, appelé la transformée de Radon sphérique :

**Définition 2.1.1** (Transformée de Radon sphérique). On appelle transformée de Radon sphérique l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} R_s: \quad C_0^\infty(B(0, 1)) &\longrightarrow C^\infty(\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+) \\ u &\longmapsto R_s u \end{aligned}$$

où

$$R_s u(x, t) := \int_{\partial B(x, t)} u(y) \, dS(y), \quad (x, t) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}_+$$

représente l'intégrale de  $u$  le long de la sphère de centre  $x$  et de rayon  $t$ . Les espaces fonctionnels, uniquement donnés à titre indicatif ici, peuvent différer selon le cadre d'étude.

Il est en effet facile d'exprimer  $\mathbf{p}$  comme suit (voir [17] par exemple) :

$$\mathbf{p}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{R_s u(x, t)}{4\pi t} \right].$$

Et puisque cette formule est d'inversion directe :

$$R_s u(x, t) = 4\pi t \int_0^t \mathbf{p}(x, t) \, dt \tag{2.11}$$

on voit que la connaissance de  $\mathbf{p}$  sur  $\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+$ , issue des mesures, équivaut à la connaissance de  $R_s u$  sur  $\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+$ . La figure 2.2 résume ceci.

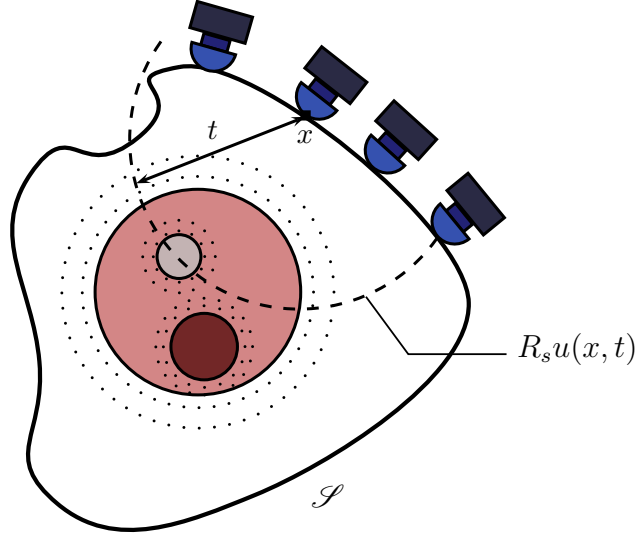


FIGURE 2.2 – Un capteur ponctuel placé en  $x$  permet d'accéder à l'intégrale de  $u$  le long de  $\partial B(x, t)$ .

#### 2.1.4 Capteurs linéiques

Les limites des capteurs ponctuels (surface de mesure, directivité, précision) ont conduit à rechercher de nouveaux dispositifs de mesure. L'un d'entre eux, particulièrement précis, utilise un interféromètre pour déterminer le déphasage d'un rayon laser traversant le champ de pression acoustique. Il permet ainsi d'accéder à l'intégrale de la pression  $\mathbf{p}$  le long de différentes droites de l'espace (voir [74]). Dans une mise en œuvre moins poussée, il est possible d'utiliser des capteurs linéiques donnant accès à la même information. Grâce à ce dispositif l'erreur commise sur la surface de détection des capteurs est moins importante, sans compter la plus grande précision de l'interféromètre. En outre, cela permet de réduire la dimension du problème inverse à résoudre, au prix de l'inversion supplémentaire d'une transformée de Radon classique, comme nous allons voir (voir également [15, 35]).

Pour fixer les idées, supposons que le capteur linéique se confonde avec la droite engendrée par le vecteur  $e_1 := (1, 0, 0)$ . Définissons alors :

$$\bar{u}(x') := \int_{\mathbb{R}} u(x_1, x') dx_1, \quad x' \in \mathbb{R}^2, \quad (2.12)$$

$$\bar{p}(x', t) := \int_{\mathbb{R}} p(x_1, x', t) dx_1, \quad (x', t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty[, \quad (2.13)$$



représentant respectivement la projection linéaire de  $u$  et de  $p$  selon  $e_1$ . En utilisant le fait que cette projection commute avec l'équation des ondes, nous trouvons que  $\bar{p}$  satisfait l'équation des ondes en *deux dimensions*, i.e. :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2}(x', t) - \Delta \bar{\mathbf{p}}(x', t) = 0, \\ \bar{\mathbf{p}}(x', 0) = \bar{u}(x'), \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t}(x', 0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Comme dans le cas de  $\mathbb{R}^3$  nous disposons d'une représentation de la solution de (2.14) :

$$\bar{\mathbf{p}}(x', t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{R_c(\bar{u})(x', s)}{\sqrt{t^2 - s^2}} ds, \quad (2.15)$$

où  $R_c$  est l'équivalent de  $R_s$  en deux dimensions, appelée la *transformée de Radon circulaire*.

Un capteur linéique recueille l'intégrale de  $\mathbf{p}(x, t)$ , la solution de (2.10), le long d'une droite  $(0, x') + \mathbb{R}e_1$ . Par conséquent il mesure  $\bar{\mathbf{p}}(x', t)$ , la solution de (2.14), pour différents  $x'$  en dehors du support de  $\bar{u}$ . Comme nous l'apprend (2.15), et contrairement au cas en trois dimensions, les données s'expriment en fonction d'intégrales pondérées de  $\bar{u}$  sur l'intérieur du disque  $B(x', t)$ . Malgré tout l'utilisation des méthodes standards pour résoudre les équations du type Abel fournit la relation suivante (voir [17]) :

$$R_c(\bar{u})(x'_{cent}, t) = 4t \int_0^t \frac{\bar{\mathbf{p}}(x'_{cent}, t')}{\sqrt{t^2 - t'^2}} dt'. \quad (2.16)$$

Ainsi le procédé de mesure permet de connaître la transformée de Radon circulaire de  $\bar{u}$ . Une fois cet opérateur inversé, on réitère le processus selon les directions  $e_\theta := (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$  afin d'obtenir les différentes projections linéaires  $\bar{u}_\theta$  de  $u$ . Finalement, une inversion de ces projections permet de reconstruire  $u$ . La figure 2.3 représente un exemple d'un tel dispositif.

Notons que les capteurs peuvent en théorie être de longueur finie sans perte d'information. En effet le support compact de  $\bar{u}$  implique que  $R_c \bar{u}$  est nulle pour  $t > 2$ . Or la formule (2.16) assure qu'il est suffisant de connaître  $\bar{p}$  pour  $t \leq 2$  afin de calculer  $R_c \bar{u}$  pour tout  $t \leq 2$ , et donc pour tout temps. De plus le principe de Huygens (voir [17] par exemple), qui n'est rien d'autre ici que la vitesse de propagation finie de l'onde, affirme que pour  $t \leq 2$  l'application  $\mathbf{p}(\cdot, t)$  reste à support dans  $B(0, 3)$ . Ainsi, des droites portant les différents capteurs linéiques, il est suffisant de ne garder que l'intersection

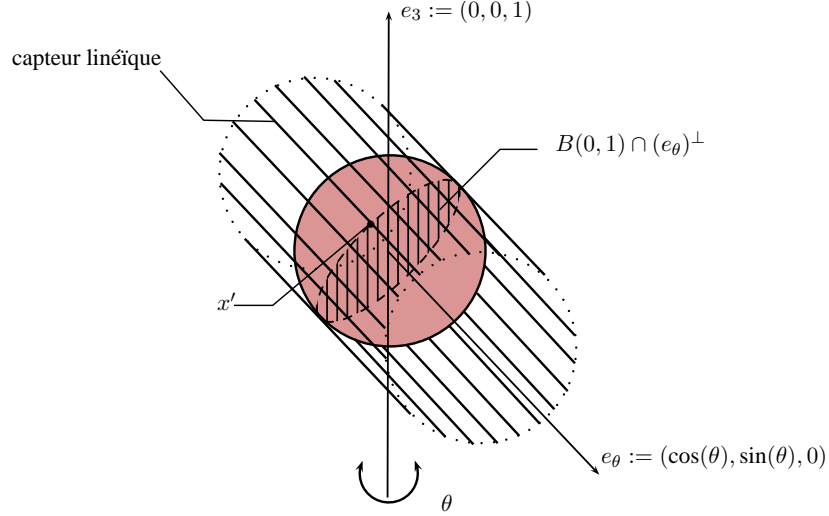


FIGURE 2.3 – Un ensemble de capteurs linéiques entourent le corps. L'ensemble est successivement orienté, par exemple, selon toutes les directions orthogonales à  $e_3$ .

avec  $B(0, 3)$ . Néanmoins les contraintes cliniques limitent de fait la longueur des capteurs (corps du patient faisant obstacle). La résolution spatiale dans ce dispositif est limitée par la seule largeur du capteur, sachant qu'avec des fibres optiques, et de surcroît avec un interféromètre, celle-ci peut ne pas excéder quelques micromètres.

*Remarque 2.1.3.* La même idée a donné naissance à un dispositif de mesure utilisant de larges détecteurs planaires, ou de manière quasiment équivalente des alignements de capteurs linéiques. La procédure d'inversion implique alors l'inversion de projections selon différents plans et semble fournir des résultats théoriques intéressants (voir [36]). Cependant ce dispositif, encombrant et difficile à faire évoluer autour du patient ne semble pas adapté à une pratique clinique.

### 2.1.5 Capteurs ponctuels : le cas particulier du plan infini

La relation privilégiée entre la transformée de Fourier et la transformée de Radon classique, via le *Fourier Slice Theorem* (voir [68] par exemple), est bien connue et fournit tout un ensemble de procédés d'inversion efficaces. Malheureusement, la transformée de Radon sphérique ne commute

pas de manière simple avec la transformée de Fourier, excepté dans le cas particulier où l'on dispose de mesures sur tout un plan de l'espace [6]. La puissance de la FFT (pour *Fast Fourier Transform*), entre autres, a inspiré plusieurs travaux considérant que la surface d'acquisition  $\mathcal{S}$  est un plan infini placé devant le corps. Les procédures d'inversion qui en ont résulté sont efficaces et élégantes. Néanmoins le fait qu'en pratique le plan d'acquisition ne peut pas être infini a tendance à rendre inaccessibles les composantes hautes fréquences du signal, rendant instable la reconstruction de certaines discontinuités des tissus.

Malgré tout j'expliciterais plus loin quelques-unes des formules auxquelles cette approche a donné forme. D'autant plus qu'il est possible d'atténuer l'effet passe-bas décrit grâce à la mise en place d'une cavité résonnante, et à l'adaptation du modèle en conséquence, tel que présenté dans [18]. La figure 2.4 donne une idée d'un tel dispositif.

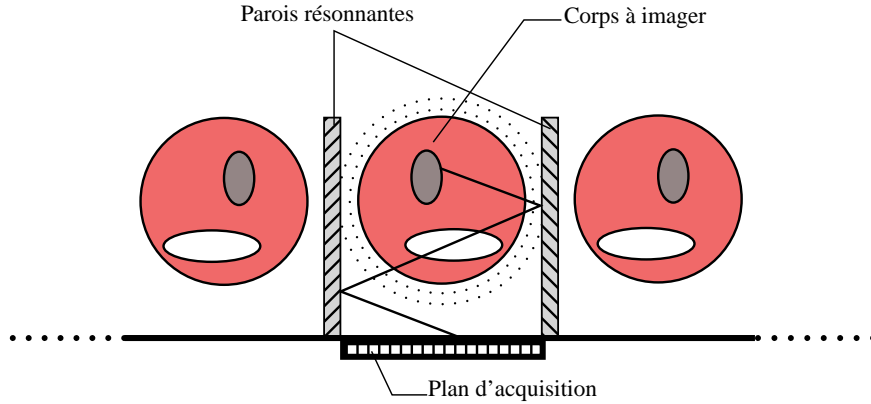


FIGURE 2.4 – Des parois résonnantes réfléchissent le signal vers le plan d'acquisition. Le signal perçu semble alors émis par un "périodisé" du corps.

## 2.2 Quelques propriétés du problème inverse

Cette section est dévolue à la présentation des principaux résultats connus concernant les propriétés du problème inverse posé par la TTA, et il s'agira souvent des propriétés des transformée de Radon sphérique et circulaire. En effet ces deux opérateurs ont une place prépondérante dans la grande majorité des travaux publiés, sans doute parce que leur utilisation per-

met d'exploiter certains outils de géométrie intégrale bien maîtrisés par la communauté (voir [72]). Dans ce qui suit la surface d'observation  $\mathcal{S}$  sera considérée comme un sous-ensemble d'une frontière  $\partial\Omega$ , où  $\Omega$  est un ouvert borné et régulier contenant  $B(0,1)$ . Sauf mention contraire, le cadre d'étude sera  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , et l'on pourra toujours considérer le problème de la TTA comme équivalent à l'inversion de la transformée de Radon sphérique car les formules (2.11) et (2.16) ont leur équivalent en toutes dimensions [17]. Lorsqu'aucune régularité sur les objets ne sera requise, on considérera ceux-ci comme étant de carré intégrable; il s'agit d'un espace naturel car son produit scalaire et sa norme, une fois discrétisés, correspondent à la norme euclidienne standard. On désignera par  $L^2(B(0,1))$  l'espace des fonctions de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  à support  $K \subset B(0,1)$ .

### 2.2.1 Continuité

L'opérateur de Radon sphérique est continu. Si le résultat est peu surprenant et de démonstration directe, il reste important pour une certaine consistance des données.

**Proposition 2.2.1.** *La transformée de Radon sphérique, définie comme suit :*

$$\begin{aligned} R_s: L^2(B(0,1)) &\longrightarrow L^2(\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+) \\ u &\longmapsto R_s u : (x, t) \mapsto \int_{\partial B(x,t)} u(y) \, dS(y), \end{aligned}$$

*est un opérateur linéaire et continu. De plus :*

$$\|R_s\| = \sqrt{|\mathcal{S}| |\partial B(x, R)|},$$

*où  $|\mathcal{S}|$  est l'aire de  $\mathcal{S}$  et  $R$  son diamètre.*

*Démonstration.* Soit  $u \in L^2(B(0,1))$  tel que  $\|u\|_{L^2} = 1$ , alors :

$$\begin{aligned} \|R_s u\|_{L^2(\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+)}^2 &= \int_{\mathcal{S}} \int_0^{+\infty} \left( \int_{\partial B(x,t)} u(y) \, dS(y) \right)^2 dt \, d\mathcal{S}(x) \\ &\leq \int_{\mathcal{S}} \int_0^{+\infty} \int_{\partial B(x,t)} u^2(y) \, dS(y) |\partial B(x,t)| dt \, d\mathcal{S}(x) \\ &\leq \int_{\mathcal{S}} \int_0^R \int_{\partial B(x,t)} u^2(y) \, dS(y) |\partial B(x,t)| dt \, d\mathcal{S}(x), \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Or un changement de coordonnées sphériques dans la double intégrale de l'intérieur conduit à :

$$\begin{aligned} \|R_s u\|_{L^2(\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+)}^2 &\leq |\partial B(x, R)| \int_{\mathcal{S}} \|u\|_{L^2(B(0,1))}^2 d\mathcal{S}(x) \\ &= |\mathcal{S}| |\partial B(x, R)| \|u\|_{L^2(B(0,1))}^2. \end{aligned}$$

En outre, si  $u$  avait été choisie constante positive le calcul aurait pu être mené avec des égalités seulement. La borne obtenue est donc optimale.  $\square$

### 2.2.2 Compacité

Dans bon nombre d'applications, la mal position du problème inverse peut-être en partie expliquée par la compacité de l'opérateur  $\mathcal{A}$  à inverser. Dans un cadre  $L^2$ , la compacité provient souvent de propriétés régularisantes de celui-ci. En effet dans ce cas l'image de  $\mathcal{A}$  est contenue dans un espace de Sobolev plus régulier que  $L^2$ , typiquement un espace de Sobolev  $W^{\alpha,2}$ ,  $\alpha > 0$ , à propos duquel on a un résultat d'injection compacte du type de celui qui suit, dont on pourra trouver des versions plus fortes dans [14] par exemple.

**Théorème 2.2.2** (Rellich-Kondrachov). *Si  $\Omega$  est un ouvert borné avec une frontière de classe  $C^1$ , on a :*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega), \quad p \geq 1,$$

avec injections compactes, notés  $i_p$ .

Supposons ici que  $\Omega = B(0,1)$  et  $\mathcal{S} = \partial\Omega$  (données complètes). Dès lors on peut extraire de [73] la proposition suivante :

**Proposition 2.2.3.** *Soit  $T$  l'opérateur donné par :*

$$\begin{aligned} T: \quad L^2(\Omega) &\longrightarrow W_{comp}^{1,2}(\Omega) \\ u &\longmapsto R_s^* R_s u, \end{aligned}$$

avec

$$W_{comp}^{1,2}(\Omega) := \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega) \mid u \text{ à support compact } K \subset \Omega \right\}$$

Alors  $T$  est bien défini et continu relativement aux normes usuelles de ces espaces.

On a alors que l'opérateur :

$$\begin{aligned} R_s^* R_s : L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto R_s^* R_s u \end{aligned}$$

vaut  $i \circ T$ . Ainsi par composition d'un opérateur compact (théorème 2.2.2) et d'un opérateur linéaire,  $R_s^* R_s$  est compact. Par conséquent,  $R_s$  est lui-même compact.

### 2.2.3 L'image de l'opérateur de Radon sphérique

Outre l'intérêt purement théorique, une bonne connaissance de l'image d'un opérateur peut être d'une grande aide lors du processus d'inversion. En effet nous avons vu (section 1.5) que l'équation normale projetait les données sur l'image de l'opérateur  $\mathcal{A}$  à inverser. Cependant il serait préférable de connaître explicitement la projection et de traiter les données avant d'entamer l'inversion, sans compter que dans le cas de l'équation normale il faut que  $g$  appartienne à  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ , qui est bien souvent un sous-ensemble strict de l'espace des données  $\mathcal{G}$ . De plus la description des propriétés que devraient présenter les données est un premier pas vers une éventuelle procédure de complétion de données dans le cas de mesures partielles. On pourra se référer à [73, 2, 28] pour une présentation détaillée. On peut ici se contenter du résultat suivant, issu de [2], que l'on formule dans le cas où  $\mathcal{S} = \partial B(0, 1)$  :

**Théorème 2.2.4** (Description de  $\text{ran}(R_s)$ ). *Soit  $\alpha \geq 0$ . Un élément  $g \in W_{\text{comp}}^{\alpha+(n-1)/2,2}(\mathcal{S} \times ]0, 2[)$  est représentable par  $R_s u$ ,  $u \in W_{\text{comp}}^{\alpha,2}(B(0, 1))$ , si et seulement si pour chaque valeur propre  $-\lambda^2$  de l'opérateur de Dirichlet-Laplace dans  $B(0, 1)$  et chaque fonction propre  $\psi_\lambda$  vérifiant :*

$$\begin{cases} \Delta \psi_\lambda(x) = -\lambda^2 \psi_\lambda(x) & , \quad x \in B(0, 1), \\ \psi_\lambda(x) = 0 & , \quad x \in \mathcal{S}, \end{cases}$$

*L'élément  $g$  vérifie la relation d'orthogonalité suivante :*

$$\int_{\mathcal{S} \times ]0, 2[} g(x, t) \partial_\nu w_\lambda(x, t) \, dS(x) \, dt = 0,$$

où

$$w_\lambda(x, t) = \psi_\lambda(x) j_{n/2-1}(\lambda t).$$

*Ici  $j_m$  désigne la  $m^{\text{ème}}$  fonction de Bessel normalisée.*

*Remarque 2.2.1.* La transformée de Radon sphérique d'une fonction supportée dans  $B(0, 1)$  est nulle pour  $t \geq 2$ , c'est pourquoi il suffit d'étudier son image en tant que sous-ensemble de  $W_{comp}^{\alpha+(n-1)/2,2}(\mathcal{S} \times ]0, 2[)$ .

## 2.2.4 Injectivité

Le problème de l'injectivité en TTA est en fait un problème d'*ensembles d'injectivité* et peut être formulé comme suit :

Pour quelles surfaces d'acquisition  $\mathcal{S}$  la transformée de Radon sphérique est-elle un opérateur injectif ?

Ou de manière équivalente :

Soit  $\mathbf{p}$  une solution de l'équation des ondes sur  $\mathbb{R}^n$  vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}(x, 0) = 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{p}(x, 0) = u(x) & , \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{p}(x, t) = 0 & , \quad (x, t) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

avec  $u$  à support compact dans  $B(0, 1)$ . Pour quelles surfaces d'observation  $\mathcal{S}$  a-t-on  $u \equiv 0$  ?

Il s'agit d'un problème primordial puisqu'une bonne compréhension des mécanismes le régissant est de grande importance dans le choix de la disposition des capteurs en TTA. Ce choix pourrait ainsi assurer que, du moins d'un point de vue théorique, deux configurations des tissus différentes produiront bien deux jeux de données distincts. Notons que certains résultats peuvent être énoncés pour des fonctions  $u$  à support non compact (mais décroissant à l'infini tout de même), cependant ils présentent des difficultés supplémentaires et ne sont que d'intérêt limité pour une application à la TTA.

La seule description complète des ensembles d'injectivité concerne le problème dans  $\mathbb{R}^2$  (dans [3]). En fait dans cette situation, très peu d'ensembles posent problème, et un rapide examen de la situation nous permet de les identifier. En effet, définissons les ensembles suivants :

$$\Sigma_N = \bigcup_{1 \leq k \leq N} L_k, \quad L_k := \left\{ re^{\frac{i\pi k}{N}} \mid r \in \mathbb{R} \right\}, \quad N \in \mathbb{N}^*,$$

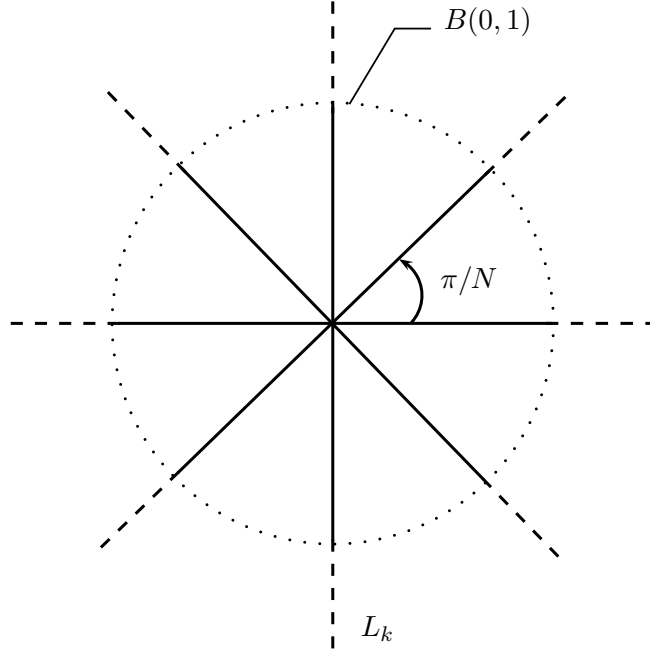


FIGURE 2.5 – Modèle pour les ensembles de non-injectivité de  $R_c$ .

représentés dans la figure 2.5. Alors on voit qu'il est aisé de construire une fonction  $u_0$  non identiquement nulle, supportée dans  $B(0, 1)$  et impaire relativement à toutes les droites  $L_k$ . Une telle fonction vérifierait :

$$R_c u_0(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_N \times \mathbb{R}_+.$$

Le théorème suivant, issu de [3], affirme que c'est la seule situation générant des problèmes d'injectivité.

**Théorème 2.2.5** (Ensembles d'injectivité, cas  $\mathbb{R}^2$ ). *Un ensemble  $\mathcal{S}$  est un ensemble d'injectivité de  $R_c$  relativement à l'ensemble des fonctions continues à support compact dans  $B(0, 1)$  si et seulement s'il n'est contenu dans aucun ensemble du type :*

$$\omega(\Sigma_N) \cup F,$$

où  $\omega$  est une transformation euclidienne du plan et  $F$  un ensemble fini.

*Remarque 2.2.2.* Le même résultat reste vrai pour des classes de fonctions moins régulières, comme  $L^2(B(0, 1))$ , grâce à l'utilisation d'approximations de l'identité radiale, par exemple une famille de gaussiennes  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ . En



effet si  $u \in L^2(B(0, 2))$  est telle que  $R_c u$  est nulle sur  $\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+$ , alors c'est aussi le cas pour les  $R_c(\phi_k * u)$  (voir l'annexe B, Corollaire B.2.3). Le théorème 2.2.5 s'applique bien aux  $\phi_k * u$  et si  $\mathcal{S}$  est un ensemble d'injectivité, tous les  $\phi_k * u$  sont nuls et, par passage à la limite,  $u$  également.

La démonstration du théorème 2.2.5 utilise des outils d'analyse microlocale (voir la section suivante) et la géométrie des ensembles de niveau des polynômes harmoniques de  $\mathbb{R}^2$ . Malheureusement ces polynômes ne sont pas si bien décrits pour des dimensions supérieures et la généralisation n'est pas évidente. On a néanmoins la conjecture suivante, issue de [5] :

**Conjecture 2.2.6** (Ensembles d'injectivité de  $\mathbb{R}^n$ ). *Un ensemble  $\mathcal{S}$  est un ensemble d'injectivité de  $R_s$  relativement à l'ensemble des fonctions continues à support compact dans  $B(0, 1)$  si et seulement s'il n'est contenu dans aucun ensemble du type :*

$$\omega(\Sigma) \cup F,$$

où  $\Sigma$  est l'ensemble des zéros d'un polynôme harmonique homogène,  $\omega$  une transformation euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ , et  $F$  un ensemble algébrique de codimension supérieure à 2.

Que signifient ces deux résultats pour la reconstruction qui nous intéresse ? En fait, rien de bon car même en omettant l'ensemble fini  $F$ , dont la présence est compréhensible dans un cadre de dimension infinie, toute disposition habituelle des capteurs (ponctuels par exemple) se situe dans un des  $\Sigma_N$ . Ainsi, si aucun a priori n'est injecté dans le problème, le processus de reconstruction ne pourra pas distinguer l'image attendue (disons pour fixer les idées  $R^\dagger g$ ) de celle-ci perturbée par une fonction impaire selon toutes les lignes  $L_k$ , et potentiellement très oscillante (une "membrane oscillante"). On voit alors qu'il faudra à la fois disposer d'un nombre suffisant de capteurs pour "resserrer" les lignes  $L_k$ , et forcer la solution à une régularité à même de l'empêcher d'osciller entre celles-ci.

*Remarque 2.2.3.* Il est intéressant de noter que lorsque le signal est capté grâce à un plan fixe placé devant le corps la conjecture suggère que, à espacement fixé entre les capteurs, le plan doit être infini pour générer de l'injectivité. Ainsi la taille du plan est d'une certaine manière l'équivalent, sur ce point comme sur la stabilité de la reconstruction, du pas entre les capteurs dans la géométrie sphérique ( $\mathcal{S} = \partial B(O, 1)$ ).

Il existe dans la littérature des résultats d'injectivité moins précis que ceux-ci mais cependant intéressants car ils utilisent des outils valables en toutes

dimensions. Ils sont formulés dans le langage des équations aux dérivées partielles et peuvent ainsi donner des informations quand la vitesse du son est considérée variable. La description la plus précise des ensembles de non-injectivité en dimension  $n$  est sans doute le fait de Peter Kuchment et Gaik Ambartsoumian dans [5], d'où l'on peut tirer le théorème suivant, énoncé dans le cas de fonctions continues à support compact, dont l'ensemble est noté  $C_0(\mathbb{R}^n)$ . Ici les auteurs réduisent le problème à la description des ensembles de non-injectivité parmi les hypersurfaces algébriques  $S$ , considérant que tout ensemble de non-injectivité est toujours inclus dans une telle surface également de non-injectivité.

**Théorème 2.2.7** (Ensembles de non-injectivité de  $\mathbb{R}^n$ ). *Soit  $S$  une surface algébrique de  $\mathbb{R}^n$  et  $u \neq 0$  dans  $C_0(\mathbb{R}^n)$  telle que  $K := \text{supp}(u)$  vérifie :*

$$\mathbb{R}^n \setminus K \text{ est connexe,}$$

et

$$\partial K \text{ est de classe } C^2.$$

*Si  $R_s u(x, t) = 0$ ,  $\forall (x, t) \in S \times \mathbb{R}_+$  alors  $S$  est une surface réglée. De plus le support de  $u$  ne peut pas se trouver entièrement dans un des demi-espaces séparés par un quelconque plan tangent à  $S$ .*

L'hypothèse sur le support de  $u$  peut être affaiblie par une condition d'unicité de projection (voir [5]). On voit ici qu'il ne manque plus à ce résultat que le fait que les droites formant la surface  $S$  passent toutes par un même point afin de prouver la conjecture en dimension  $n$ . L'ensemble des ensembles pouvant conduire à une absence d'injectivité est toutefois déjà drastiquement réduit. Parmi les corollaires immédiats de ce théorème citons la proposition suivante (déjà présente, indépendamment, dans [26], dont les auteurs de [5] utilisent quelques résultats) :

**Corollaire 2.2.8.** *Soit  $u \neq 0$  une fonction de  $L^2(B(0, 1))$  et  $\Omega \supset \text{supp}(u)$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\partial\Omega$  est strictement convexe et régulier et si  $\Gamma$  est un ouvert relatif non vide de  $\partial\Omega$ , alors  $R_s u$  n'est pas identiquement nul sur  $\Gamma \times \mathbb{R}_+$ .*

*En particulier, n'importe quelle portion non vide de la sphère unité est un ensemble d'injectivité de la transformée de Radon sphérique.*

Dans le cas d'une vitesse du son variable  $v_s(x)$  dans l'équation des ondes (2.9), les géométries se compliquent significativement. Néanmoins on peut citer le théorème suivant, issu de [29] par exemple (voir également [80]) :

**Théorème 2.2.9** (Cas de la vitesse variable). *Soit  $\mathcal{S}$  la frontière régulière d'un ouvert borné contenant le support de  $u$ , et soit  $v_s$  une fonction régulière strictement positive. Alors, si  $\mathbf{p}$ , solution de (2.9), s'annule sur  $\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+$  on a  $u \equiv 0$ .*

Notons que l'on trouve dans [73] un résultat dans la situation, entre autres, où la surface de détection  $\mathcal{S}$  est une demi-sphère :

$$\mathcal{S} := \{x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \partial B(0, 1) | x_1 \geq 0\}.$$

Dans ce cas, si  $u$  est à support dans  $B(0, 1) \cap \{x_1 \geq 0\}$ , alors on a l'estimation :

$$\|u\|_{L^2_{comp}} \leq C \|R_s u\|_{W^{1/2,2}_{comp}(\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+)}, \quad C > 0,$$

qui, en plus d'assurer l'injectivité, fournit la stabilité de la reconstruction. Ceci est plutôt encourageant quant au problème des données partielles car dans le cas de la mammographie par exemple le sein à imager peut être inséré dans la demi-sphère contenant les capteurs. Nous allons voir dans la section suivante que dans une géométrie sphérique la demi-sphère est la plus petite portion de sphère conduisant à la stabilité.

### 2.2.5 Stabilité de la reconstruction

Nous avons déjà remarqué que, du fait de ses propriétés régularisantes globales, la compacité de l'opérateur de Radon sphérique était un obstacle à la stabilité de la reconstruction en TTA (voir section 2.2.2). Néanmoins d'autres phénomènes, principalement liés au manque de données, introduisent des effets régularisants supplémentaires, mais locaux cette fois. Nous venons de voir que dans le cas de mesures sur une demi-sphère, un objet contenu dans la demi-boule correspondante pouvait être reconstruit de manière stable si l'on ignorait le caractère régularisant inhérent à la transformée de Radon sphérique (c'est-à-dire si l'on considère l'espace des données comme étant  $W^{1/2,2}_{comp}(\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+)$ ). Que se passe-t-il dans cette situation ? Comme les cercles concentriques produits par la chute d'une pierre dans l'eau, l'information contenue en un point  $x$ , pour une solution de l'équation des ondes à vitesse du son constante, se propage à la même vitesse selon toutes les droites passant par  $x$ . Or lorsque le corps est contenu dans la demi-boule, toutes les droites passant par un point du support de  $u$  intersectent la surface de détection ; l'information est transmise aux capteurs. La figure 2.6 schématise ce fait.

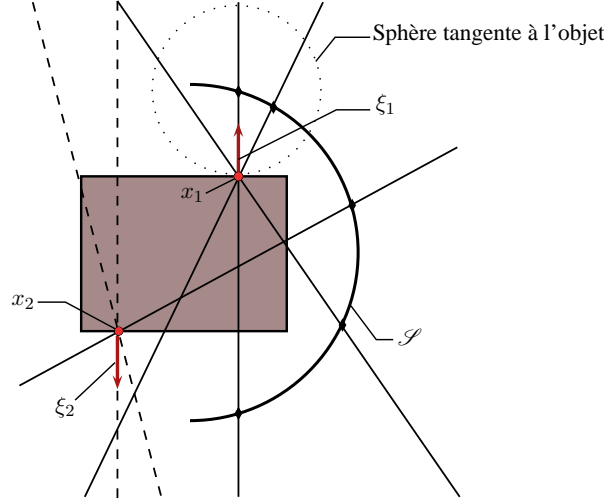


FIGURE 2.6 – Cas de la demi-sphère : seules les parties de l’objet situées dans la demi-boule vont transmettre toute l’information aux capteurs.

Nous allons formaliser cette situation et voir que le cas d’une vitesse du son non constante est similaire. Il s’agit principalement ici d’être capable de reconstruire les singularités de l’objet  $u$  (bord d’une tumeur, etc). Pour cela nous allons utiliser des outils d’analyse microlocale pour lesquels nous ne donnerons que des définitions et des démonstrations elliptiques ; on pourra se référer à [43] pour des résultats plus détaillés. On sait que la régularité d’une fonction est directement liée à la vitesse de décroissance de sa transformée de Fourier à l’infini. Partant de là, étant donné un point  $x \in \mathbb{R}^n$  et une direction dans l’espace de Fourier  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , on peut dire qu’une fonction  $f$  est *régulière microlocalement* en  $x$  dans la direction  $\xi$  si l’on peut trouver une fonction  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\phi(x) = 1$  (il s’agit d’une localisation) et un cône  $V \ni \xi$ , ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ , tels que :

$$\forall M \in \mathbb{N}^*, \exists C_M > 0, \quad |\mathcal{F}(\phi f)(\xi')| \leq C_M(1 + |\xi'|)^M, \quad \xi' \in V. \quad (2.17)$$

Dès lors on peut définir le *spectre singulier* de  $f$  comme suit :

**Définition 2.2.1** (Spectre singulier). Le spectre singulier de  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , noté  $WF(f)$  (pour *wave front set* en anglais), est l’ensemble des couples  $(x, \xi)$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tels que  $f$  **n’est pas** microlocalement régulière en  $(x, \xi)$ .

De même on peut définir l’ensemble  $WF_s(f)$  des  $(x, \xi)$  tels que  $f$  n’est pas

microlocalement dans  $H^s$ , c'est-à-dire en remplaçant la condition (2.17) par :

$$\int_{\xi' \in V} |\mathcal{F}(\phi f)(\xi')|^2 (1 + |\xi'|^2)^s d\xi' < \infty \quad (2.18)$$

Ainsi ces ensembles contiennent une double information : en quels points la fonction n'est pas régulière *et* dans quelle direction se trouve cette singularité. Par exemple, si  $f$  est la fonction caractéristique d'un ouvert  $\mathcal{O}$  à bord régulier, alors  $WF(f)$  est l'ensemble des couples formés d'un point  $x$  de  $\partial\mathcal{O}$  et d'une direction  $\xi$  normale à  $\partial\mathcal{O}$ .

*Remarque 2.2.4.* On peut définir le spectre singulier pour des classes de fonctions beaucoup plus générales (distributions définies sur des variétés) mais je m'en tiens ici au strict nécessaire afin que l'exposé ne devienne pas trop obscur. En outre, je prendrai l'habitude dans la suite de séparer la variable de temps  $t$  de celle d'espace  $x$ , et de fait la fréquence  $\tau$  et la direction  $\xi$ .

À présent que nous disposons de l'outil pour décrire les singularités, il s'agit de savoir comment celles-ci se propagent. Pour cela il nous faut introduire les courbes bicaractéristiques liées à une équation aux dérivées partielles. Elles sont construites de manière à ce que le symbole principal de l'équation  $y$  soit nul (voir [43] pour plus de détails) et, dans le cas de l'équation des ondes, leur paramétrisation par une variable  $s$  est solution de :

$$\begin{cases} (\dot{x}(s), \dot{t}(s)) = (-v_s^2(x)\xi, \tau), \\ \left(\dot{\xi}(s), \dot{\tau}(s)\right) = \left(\frac{1}{2}\nabla v_s^2(x)|\xi|^2, 0\right) \\ (x(0), t(0), \xi(0), \tau(0)) = (x_0, 0, \xi_0, v_s(x_0)|\xi_0|). \end{cases} \quad (2.19)$$

En vue de l'application au problème de la TTA, on s'intéresse uniquement aux bicaractéristiques passant par le plan  $\{t = 0\}$ . On notera  $\mathcal{B}(x_0, \xi_0)$  la projection dans l'espace des variables  $(x, t)$  des deux courbes définies par (2.19) avec  $\xi_0$  et  $-\xi_0$  (correspondant aux deux directions opposées de propagation). Si la vitesse du son  $v_s$  est constante on voit immédiatement que les projections en  $x$  des courbes  $\mathcal{B}(x_0, \xi_0)$ , que l'on note  $\mathcal{B}_x(x_0, \xi_0)$ , sont des droites. Le théorème suivant, adapté d'un résultat de Hörmander ([43], [20] et [80] pour celui-ci dans le cadre de la TTA), montre que les singularités se propagent le long des bicaractéristiques.

**Théorème 2.2.10** (Propagation des singularités). *Soit  $\mathbf{p}$  solution de l'équation des ondes homogène (2.9). Alors pour toute partie connexe  $I$  d'une courbe bicaractéristique de cette équation, soit l'on a  $I \subset WF(\mathbf{p})$ , soit l'intersection  $I \cap WF(\mathbf{p})$  est vide.*

Ainsi une singularité en un point  $x_0$ , et dans la direction  $\xi_0$ , de la condition initiale  $u$  ne générera une singularité en un point  $x_s$  de la surface de détection  $\mathcal{S}$  que si une courbe bicharactéristique relie les deux points entre eux, i.e.  $x_s \in \mathcal{B}_x(x_0, \xi_0)$ .

Si la vitesse du son est constante, on peut exprimer ce résultat à l'aide de la transformée de Radon sphérique (voir [57]). Dans ce cas on a :

**Proposition 2.2.11.** *Les singularités de  $u$  que l'on retrouve dans  $R_s u$ , et donc potentiellement stables à reconstruire, sont les  $(x_0, \xi_0)$  pour lesquels il existe  $(x_s, t) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}_+$  tel que  $\xi_0$  soit normal à  $\partial B(x_s, t) \ni x_0$ .*

Par exemple sur la figure 2.6 les bords du rectangle ne seront reconstruits stablement qu'à condition de disposer d'intégrales le long de sphères centrées sur  $\mathcal{S}$  et *tangentes en ce bord*. On comprend bien que si l'on ne dispose que d'intégrales le long de sphères *normales* à un bord, ce dernier ne créera aucune variation dans les données et par là ne sera pas détectable par le processus de reconstruction. Voir, dans un cas simple de reconstruction par la méthode des moindres carrés sans bruit, la figure 2.7, ou la validation numérique de [91].

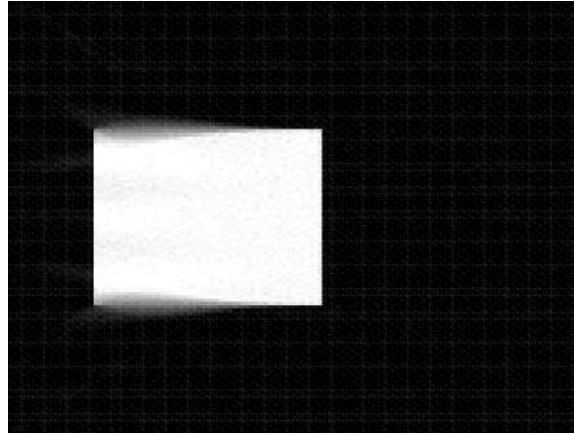


FIGURE 2.7 – Reconstruction d'un rectangle par les moindres carrés. Les capteurs sont placés sur un demi-cercle englobant la moitié droite du rectangle.

Revenons à présent au cas de la vitesse du son variable et au théorème suivant, issu de [69], qui explicite en quoi la reconstruction ne peut être stable si les singularités ne sont pas transmises à la surface d'acquisition.

**Théorème 2.2.12.** *Soit  $U$  et  $O$  deux ouverts non vides de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $\mathcal{S} \subset O$ . Supposons qu'il existe une direction  $\xi_0$  telle que pour tout  $x_0 \in U$  la projection  $\mathcal{B}_x(x_0, \xi_0)$  n'intersecte pas  $O$ . Alors la reconstruction de la condition initiale  $u$  à partir des données  $\{\mathbf{p}(x, t) | (x, t) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}_+\}$  n'est pas Hölder stable. C'est-à-dire qu'il n'existe pas  $\mu, \delta, s_0, s_1, C > 0$  tels que :*

$$\|u\|_{L^2(B(0,1))} \leq C \|\mathbf{p}\|_{H^{s_0}(\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+)}^\mu, \quad u \in L^2(B(0,1)), \quad \|u\|_{H^{s_1}(B(0,1))} \leq \delta.$$

La condition de Hölder est habituellement considérée comme raisonnable dans un problème inverse. Or ici elle ne peut être satisfaite car sous les conditions du théorème la solution  $\mathbf{p}$  de l'équation des ondes est  $C^\infty$  dans  $O$ . La démonstration de [69] est intéressante car elle relie l'instabilité à la décroissance des valeurs singulières de l'opérateur ; encore une fois c'est la continuité et la compacité des injections entre les différents espaces  $H^s$  qui jouent un rôle clé.

## 2.2.6 Discrétisation de la transformée de Radon sphérique

Pour des raisons de temps de calcul et de représentation des résultats, les tests numériques présentés ici seront en deux dimensions seulement. Nous avons vu que ce cas n'est pas dénué d'intérêt pratique puisque certains dispositifs de mesure conduisent à l'inversion de la transformée de Radon *circulaire* (voir la section 2.1.4).

Ayant fixé une résolution  $\text{res} \in \mathbb{N}^*$  pour l'image, on représente celle-ci par un vecteur de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = \text{res}^2$  dont chacune des composantes  $\mathbf{x}_j$  représente le niveau de gris de l'image au  $j^{\text{ème}}$  pixels de l'image. Ainsi pour un certain nombre de capteurs  $nb_c \in \mathbb{N}^*$  positionnés aux points  $(x_k)_{1 \leq k \leq nb_c}$  et un nombre de mesures en temps à chaque capteur  $nb_t \in \mathbb{N}^*$ , les données peuvent être représentées par un vecteur  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ,  $m = nb_c \times nb_t$  et on peut définir la *matrice de Radon circulaire* comme un élément  $R := (r_{ij})$  de  $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$  tel que :

$$r_{ij} = \int_{\partial B(x_{k_i}, t_{s_i})} \mathbb{1}_{p_j}(z) \, dS(z), \quad (i, j) \in [1 : m] \times [1 : n],$$

où  $p_j$  représente le  $j^{\text{ème}}$  pixels,  $x_{k_i}$  et  $t_{s_i}$  correspondent à la position du capteur et au temps de mesure rangés en  $i^{\text{ème}}$  position dans le vecteur  $\mathbf{y}$ . Dans les applications montrées ici les  $x_k$  seront placés sur une portion de la

sphère unité en dehors du support de l'image et les temps seront équirépartis dans  $[0, T]$ , où  $T \geq \sup \{\|x_k - z\| \mid 1 \leq k \leq nb_c, z \in \text{supp}(u)\}$ .

On peut d'emblée remarquer que la matrice  $R$  est particulièrement creuse (voir figure 2.8), les procédures existantes pour stocker et multiplier les matrices creuses rendent donc raisonnable l'emploi d'une matrice à la place d'un opérateur dans les algorithmes.

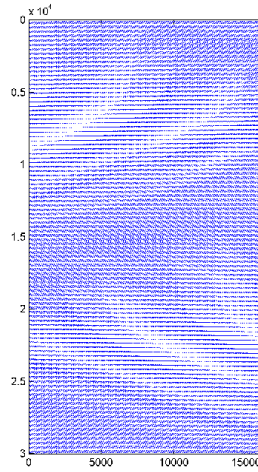


FIGURE 2.8 – Creusité de la matrice de Radon sphérique. Capteurs répartis sur toute la sphère,  $\text{res}=128$ ,  $nb_c = 150$ ,  $nb_t = 200$ .

La taille de cette matrice rend malaisé le calcul d'un nombre significatif de valeurs propres. Malgré tout on pourra se donner une idée de leur décroissance sur la figure 2.9. On peut constater que, du moins en ce qui concerne les 200 premières valeurs, la situation n'est pas si mauvaise : la régularisation globale énoncée dans la section 2.2.2 n'a pas d'effets désastreux sur le conditionnement du problème. Plus marquant est le fait que la même matrice construite à partir de capteurs moins nombreux et positionnés sur une demi-sphère seulement conduit au même profil pour les premières valeurs singulières. Bien évidemment le faible nombre de valeurs calculées ne suffit pas à énoncer une quelconque conclusion.



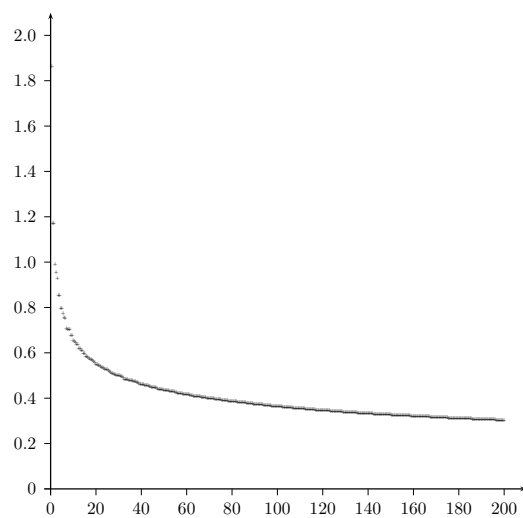


FIGURE 2.9 – Profil des premières valeurs singulières de  $R$ .



## Annexe B

# Suppléments

### B.1 Solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^n$

Je reproduis ici une partie du raisonnement présent dans [17] menant à l'expression des solutions de l'équation des ondes en fonction de la transformée de Radon sphérique. De nombreux résultats classiques sont également disponibles dans [44].

#### Équation de Darboux

Supposons, pour aider à la clarté des calculs, que  $u$  soit une fonction continûment dérivable sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors on définit la transformée de Radon sphérique *normalisée* de  $u$  par :

$$R_s^n u(x, r) := \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(x + ry) \, dS(y) = \frac{1}{r^{n-1} \omega_n} R_s u(x, r),$$

où  $\omega_n$  est la mesure totale de la sphère unité. Or celle-ci vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_s^n u}{\partial r}(x, r) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \langle y, \nabla u(x + ry) \rangle \, dS(y) \\ &= \frac{1}{r^{n-1} \omega_n} \int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x + y) \, dS(y) \\ &= \frac{1}{r^{n-1} \omega_n} \int_{B(0,r)} \Delta u(x + y) \, dy, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est une application de la formule de Green (voir par exemple [14]). En dérivant une nouvelle fois par rapport à  $r$ , il est aisé de constater que  $R_s^n u$  satisfait le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 R_s^n u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial R_s^n u}{\partial r} - \Delta R_s^n u = 0, \quad (x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \\ R_s^n u(x, 0) = u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial R_s^n u}{\partial r}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

et l'on peut prolonger  $R_s^n u$  par parité afin qu'elle soit définie pour tout  $r \in \mathbb{R}$ . L'équation (B.1) s'appelle l'équation de Darboux et elle nourrit des liens étroits avec l'équation des ondes. Pour mieux s'en persuader étudions le cas où  $u$  ne dépend que de sa première variable, i.e.  $u(x_1, \dots, x_n) = \tilde{u}(x_1)$ . Dans ce cas on peut exprimer sa transformée de Radon sphérique comme suit :

$$R_s^n u(x, r) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^1 \tilde{u}(x_1 + rs)(1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds,$$

et elle satisfait l'équation de Darboux :

$$\frac{\partial^2 R_s^n u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial R_s^n u}{\partial r} - \frac{\partial^2 R_s^n u}{\partial x_1^2} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Or en remplaçant dans (B.2) la dérivée en espace par sa valeur on obtient :

$$\frac{\partial^2 R_s^n u}{\partial r^2}(x, r) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial R_s^n u}{\partial r}(x, r) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^1 \tilde{u}''(x_1 + rs)(1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds.$$

En se concentrant sur la seule dépendance en  $r$  on peut énoncer le résultat suivant :

**Proposition B.1.1.** *Si deux fonctions  $v$  et  $w$  sont liées par la relation :*

$$v(r) = \int_{-1}^1 w(rs)(1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds, \quad r \in \mathbb{R},$$

*alors on a :*

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = \int_{-1}^1 w''(rs)(1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds, \quad r \in \mathbb{R}^*.$$

Ainsi nous avons trouvé une transformation qui échange les opérateurs différentiels  $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$  et  $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ , c'est-à-dire qui intervertit les équations de Darboux et des ondes.

## Solution de l'équation des ondes

Si à présent on applique cette transformation à une solution  $\mathbf{p}$  de l'équation des ondes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}(x, t) - \Delta \mathbf{p}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ \mathbf{p}(x, 0) = u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

que l'on prolonge par parité pour les temps négatifs, on en vient à définir :

$$v(x, r) := \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^1 \mathbf{p}(x, rs)(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds, \quad (x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Or  $v$  vérifie :

$$\begin{aligned} \Delta v(x, r) &= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^1 \Delta \mathbf{p}(x, rs)(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}(x, rs)(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(x, r) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(x, r), \end{aligned}$$

en vertu de la proposition B.1.1. Donc  $v$  satisfait le problème de Cauchy (B.1), et par unicité d'une telle solution on obtient :

$$\frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_0^1 \mathbf{p}(x, rs)(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds = R_s^n u(x, r). \quad (\text{B.4})$$

C'est l'inversion de cette dernière égalité qui permet l'expression des solutions de l'équation des ondes :

**Théorème B.1.2** (Formules de Poisson-Kirchhoff). *Soit  $\mathbf{p}$  la solution, paire en temps, du problème de Cauchy (B.3) dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors on a :*

$$(i) \quad \mathbf{p}(x, t) = \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n}{2}} \int_0^t \frac{R_s u(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

quand  $n$  est pair, et :

$$(ii) \quad \mathbf{p}(x, t) = \frac{t}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}} \left( \frac{1}{2t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{R_s u(x, t)}{t} \right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

quand  $n$  est impair.

## B.2 Mollification par des noyaux radiaux

On s'intéresse ici à la convolution en espace par un noyau radial de la forme  $\phi : x \mapsto \tilde{\phi}(\|x\|)$  d'une solution  $\mathbf{p}$  du problème de Cauchy (B.3), que l'on prolonge par parité pour les temps négatifs. En s'inspirant de la formule (B.4) on définit l'opérateur linéaire :

$$\begin{aligned} W_n : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ v &\longmapsto W_n v \end{aligned},$$

avec

$$W_n v(r) := 2r\omega_{n-1} \int_0^r v(s)(r^2 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Ainsi l'égalité (B.4) s'écrit :

$$R_s u(x, r) = W_n (\mathbf{p}(x, \cdot))(r), \quad (x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Le lemme qui suit est de démonstration immédiate :

**Lemme B.2.1.** *Si l'on définit la fonction :*

$$\check{v} : r \longmapsto v(-r),$$

*alors on a :*

$$W_n \check{v}(r) = W_n v(-r).$$

Le théorème suivant décrit l'effet d'une convolution par une fonction radiale de la condition initiale de (B.3) :

**Théorème B.2.2.** *La fonction  $\mathbf{p} *_x \phi$  est solution du problème de Cauchy (B.3) avec la condition initiale  $\check{u} := u *_x \phi$ . De plus, pour chaque couple  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , on a la formule :*

$$(\mathbf{p} *_x \phi)(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} W_n^*(\tilde{\phi})(r) \mathbf{p}(x, t - r) dr. \quad (\text{B.5})$$

*Démonstration.* Grâce à un changement de variables sphériques, on a :

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} *_x \phi)(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{p}(x - y, t) \phi(\|y\|) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{\phi}(r) \underbrace{\int_{\partial B(0, r)} \mathbf{p}(x - y, t) dS(y)}_{R_s(\mathbf{p}(\cdot, t))(x, r)} dr. \end{aligned}$$

Or, d'après l'égalité (B.4), on a :

$$R_s(\mathbf{p}(\cdot, t))(x, r) = W_n(\bar{\mathbf{p}}(x, \cdot, t))(r),$$

où pour chaque  $t \in \mathbb{R}$  fixé  $\bar{\mathbf{p}}(\cdot, \cdot, t)$  est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{p}}}{\partial s^2}(x, s, t) - \Delta \bar{\mathbf{p}}(x, s, t) = 0, \quad (x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ \bar{\mathbf{p}}(x, 0, t) = \mathbf{p}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial s}(x, 0, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \quad (\text{B.6})$$

et est prolongée à tout  $s \in \mathbb{R}$  par parité. Ainsi par unicité d'une solution paire de (B.6) il vient :

$$\bar{\mathbf{p}}(x, s, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}(x, t + s) + \mathbf{p}(x, t - s)), \quad (x, s, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

En injectant cette dernière égalité dans l'expression de  $R_s(\mathbf{p}(\cdot, t))(x, r)$ , on obtient :

$$(\mathbf{p} *_x \phi)(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{\phi}(r) [W_n(\mathbf{p}(x, t - \cdot))(r) + W_n(\mathbf{p}(x, t + \cdot))(r)] \, dr,$$

et une simple application du Lemme B.2.1 conduit à :

$$(\mathbf{p} *_x \phi)(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(r) W_n(\mathbf{p}(x, t - \cdot))(r) \, dr.$$

La définition de l'opérateur adjoint de  $W_n$  fournit l'égalité (B.5).  $\square$

L'expression de  $\mathbf{p} *_x \phi$  que l'on obtient ici est intéressante car elle montre que si le noyau est radial alors on est en présence d'une convolution *en temps* :

$$\mathbf{p} *_x \phi = \frac{1}{2} \left( \mathbf{p} *_t W_n^*(\tilde{\phi}) \right).$$

Elle démontre à elle seule le corollaire suivant :

**Corollaire B.2.3.** *S'il existe un point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que :*

$$\mathbf{p}(x_0, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

*alors pour chaque noyau radial  $\phi$  on a :*

$$(\mathbf{p} *_x \phi)(x_0, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Outre l'intérêt théorique du Corollaire B.2.3, pour la régularité des fonctions dans les résultats d'injectivité par exemple, la formule (B.5) peut-être utile en pratique pour régulariser les données. En effet les mesures fournissent la valeur, pour tout temps  $t \in \mathbb{R}_+$ , de  $\mathbf{p}$  en certains points de l'espace, et il est donc possible de convoler en temps ces données pour obtenir artificiellement les valeurs de  $\mathbf{p} *_x \phi$  en ces mêmes points de l'espace. Encore faut-il disposer d'expressions explicites, et facilement calculables, du terme  $W_n^* \tilde{\phi}$ . Or il se trouve que les noyaux gaussien  $\phi_\beta$  définis par :

$$\phi_\beta^n(x) = \tilde{\phi}_\beta^n(\|x\|) := \frac{1}{(\pi\beta)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{\beta}}, \quad \beta > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

sont des fonctions propres de l'opérateur  $W_n^*$ . Plus explicitement :

**Proposition B.2.4.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\beta > 0$ , alors :*

$$W_n^* \tilde{\phi}_\beta^n = 2\tilde{\phi}_\beta^1.$$

*Démonstration.* Soit  $v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} W_n^* \tilde{\phi}_\beta^n(r) v(r) dr &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}_\beta^n(r) W_n v(r) dr \\ &:= \frac{2\omega_{n-1}}{(\pi\beta)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{r^2}{\beta}} \int_0^r v(s) (r^2 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds dr \\ &= \frac{2\omega_{n-1}}{(\pi\beta)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} v(s) \int_{|s|}^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{\beta}} (r^2 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} dr ds. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient d'une application du théorème de Fubini et de la parité du deuxième intégrande. La suite du calcul est pensée pour pouvoir effectuer le changement de variable  $r \leftrightarrow (r^2 - s^2)/\beta$  final :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} W_n^* \tilde{\phi}_\beta^n v &= \frac{2\omega_{n-1}}{(\pi\beta)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} v(s) e^{-\frac{s^2}{\beta}} \int_{|s|}^{+\infty} r e^{-\frac{(r^2 - s^2)}{\beta}} (r^2 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} dr ds \\ &= \frac{\omega_{n-1} \beta^{\frac{n-3}{2}}}{(\pi\beta)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} v(s) e^{-\frac{s^2}{\beta}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-z} z^{\left(\frac{n-1}{2}-1\right)} dz}_{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} ds \end{aligned}$$

Ici l'on reconnaît la fonction Gamma qui vaut, pour les demi-entiers :

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\omega_n}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi après simplification, comme la fonction  $v$  est arbitraire dans  $L^2(\mathbb{R})$ , on a bien le résultat annoncé.  $\square$



Ce résultat, combiné avec la formule (B.5), donne une place très particulière, comme souvent, aux noyaux gaussiens. En effet la convolution en espace de  $\mathbf{p}$  par une gaussienne de masse totale 1 est égale à la convolution en temps de  $\mathbf{p}$  par une gaussienne *de même variance*  $\beta$  de masse totale valant également 1.

### B.3 La transformée de Radon classique

Nous avons vu dans cette section comment la TTA faisait intervenir la transformée de Radon sphérique. Or cette dernière tire son nom d'une transformée étudiée pour la première fois dans le détail par le mathématicien autrichien Johann Radon en 1917, qui quant à elle fait intervenir des intégrales le long d'hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} R: \quad L^1(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^1(\partial B(0, 1) \times \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto Rf \end{aligned}$$

où

$$Rf(\omega, p) = \int_{\langle \omega, x \rangle = p} f(x) \, dS(x).$$

Cette transformée est bien étudiée ([68, 72]) et son inversion est facilitée par sa relation avec la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$ , résumée dans la propriété suivante :

**Théorème B.3.1** (Fourier Slice Theorem).

$$\mathcal{F}_x f(\xi := \sigma\omega) = \mathcal{F}_p Rf(\omega, \sigma), \quad (\sigma, \omega) \in \mathbb{R} \times \partial B(0, 1).$$

En outre il existe pour la transformée de Radon classique une formule d'inversion exacte, impliquant son adjoint dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (voir [68, 72]) :

**Théorème B.3.2** (Rétroprojection filtrée). *Pour toute fonction continue intégrable  $f$ , on a :*

$$f(x) = \frac{(-\Delta)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} R^* Rf(x), \quad x \in \mathbb{R}^n;$$



## Chapitre 3

# Formules d'inversion

### 3.1 Aperçu

Ce chapitre est consacré à la présentation des principales formules d'inversion connues pour la transformée de Radon sphérique  $R_s$ . Elles nécessitent la plupart du temps la connaissance de cette transformation sur toute une surface englobant la boule unité  $B(0, 1)$ , bien souvent une sphère. Ainsi elles correspondent toutes à des procédés de résolution du problème inverse de la TTA dans le cas d'une vitesse du son constante et d'une surface d'acquisition des données englobant totalement le corps à imager (données complètes).

Dans un premier temps je présenterai une formule de *rétroprojection filtrée* (section 3.2), utilisant l'adjoint de l'opérateur  $R_s$ , qui est l'équivalent en géométrie sphérique d'une formule connue portant le même nom et s'appliquant à la transformée de Radon classique. Ensuite nous verrons que l'approche spectrale est fructueuse en TTA. En effet elle fournit une formule d'inversion utilisant les séries de Fourier-Bessel (section 3.3), aussi bien que la transformée de Fourier classique pour une surface d'acquisition plane (section 3.4). Finalement une utilisation des fonctions propres de l'opérateur de Laplace fournira une solution sous forme de série convergeant dans  $L^2$  (section 3.5), peu coûteuse et valable pour diverses surfaces d'acquisition.

Je fournirai des exemples de démonstrations lorsque l'utilisation de certaines techniques dans celles-ci le justifiera, fournissant ainsi un panorama (non complet) des outils mathématiques mis en œuvre par l'inversion du problème de la TTA.

### 3.2 Une rétroprojection filtrée

La transformée de Radon sphérique tire son nom, et peut être vue comme une généralisation à l'intégration le long d'hypersurfaces (en l'occurrence des sphères), de la transformée de Radon classique  $R$ , où l'intégration est faite le long d'hyperplans de  $\mathbb{R}^n$ . Or on dispose d'une formule d'inversion exacte pour cette dernière (voir l'annexe B et [68]) :

$$u = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}} \Delta_x^{(n-1)/2} (R^* R u). \quad (3.1)$$

Dans le cas sphérique, l'utilisation de l'adjoint revient à utiliser, pour la reconstruction en chaque point  $x \in \mathbb{R}^n$ , l'ensemble des intégrales le long de sphères passant par  $x$  (voir l'annexe C pour les détails). La figure 3.1 illustre ce fait.

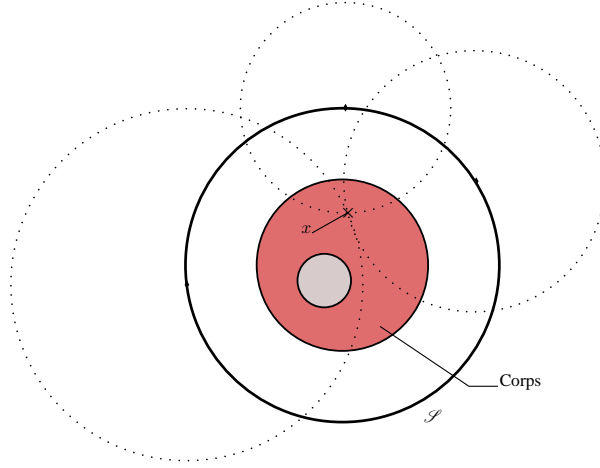


FIGURE 3.1 – Pour reconstruire la fonction en un point  $x$ , la rétroprojection utilise toutes les intégrales disponibles passant par  $x$ .

Il est naturel de se demander si une telle formule, appelée *rétroprojection filtrée*, reste valable, éventuellement dans une forme modifiée, en géométrie sphérique. La réponse est positive et peut être trouvée dans deux articles, [26] et [25], dont les auteurs ont démontré successivement le résultat pour les dimensions impaires et paires. Pour faciliter leur énoncé, introduisons tout d'abord quelques notations et définitions.

### 3.2.1 Notations, Définitions

Ici la surface d'acquisition  $\mathcal{S}$  sera la sphère unité  $\partial B(0, 1)$ .

On notera  $\tilde{C}^\infty(\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+)$ , ou tout simplement  $\tilde{C}^\infty$ , l'ensemble des applications indéfiniment dérivables  $g$  décroissant rapidement lorsque  $t$  tend vers l'infini et dont les dérivées  $\partial_t^k g(x, 0)$  sont nulles pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathcal{S}$ .

Pour plus de concision nous allons expliciter les formules d'inversion *via* l'équation des ondes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}(x, t) - \Delta \mathbf{p}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ \mathbf{p}(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Notons  $\mathcal{W}$  l'opérateur défini sur  $C_0^\infty(B(0, 1))$  qui à une application  $u$  associe la solution  $\mathbf{p}$  de (3.2) pour  $f = u$  et  $g = 0$ , restreinte à  $\partial B(0, 1) \times \mathbb{R}_+$ . Notons  $\mathcal{P}$  l'opérateur défini sur  $C_0^\infty(B(0, 1))$  qui à une application  $u$  associe la solution  $\mathbf{p}$  de (3.2) pour  $f = 0$  et  $g = u$ , restreinte à  $\partial B(0, 1) \times \mathbb{R}_+$ . On a :

$$\mathcal{W} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}.$$

En effet, si  $u$  est dans  $C_0^\infty(B(0, 1))$ , alors  $\bar{\mathbf{p}} := \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}u$  satisfait encore l'équation des ondes homogène, et vérifie de plus :

$$\bar{\mathbf{p}}(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}u(x, 0) = u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{P}u(x, 0) = \Delta \mathcal{P}u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi l'unicité de la solution du problème de Cauchy (3.2) assure que  $\bar{\mathbf{p}} = \mathcal{W}u$ . Les images des opérateurs  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{P}$  sont contenues dans  $\tilde{C}^\infty(\partial B(0, 1) \times \mathbb{R}_+)$ .

### 3.2.2 Principaux résultats

Même s'il masque les spécificités des dimensions paires et impaires, le théorème suivant a l'avantage de présenter de manière unifiée les formules d'inversion en toutes dimensions.

**Théorème 3.2.1** (Rétroprojection filtrée). *Soit  $n \geq 2$  et  $u \in C_0^\infty(B(0, 1))$ , alors :*

$$u(x) = 2\mathcal{W}^* t \mathcal{W} u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

*En particulier, grâce au théorème B.1.2 on a, pour  $n = 2$  :*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,1)} \int_0^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) (R_s^n u)(p, r) \log |r^2 - \|x - p\|^2| \, dr \, dS(p),$$

*et :*

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \Delta \int_{\partial B(0,1)} \frac{R_s u(p, \|x - p\|)}{\|x - p\|} \, dS(p),$$

*lorsque  $n = 3$ .*

Évidemment l'utilisation de l'expression de  $\mathcal{W}u$  du théorème B.1.2 permet d'en déduire les formules d'inversion de la transformée de Radon sphérique (voir l'annexe C). Il pourra être plus pratique, notamment pour les démonstrations, d'utiliser une version faible du théorème 3.2.1 :

**Théorème 3.2.2** (Identités de trace). *Soit  $n \geq 2$ ,  $u$  et  $v$  deux applications dans  $C_0^\infty(B(0, 1))$ , alors on a les identités de trace suivantes :*

$$\langle u, v \rangle = 2\langle \mathcal{W}u, t \mathcal{W}v \rangle, \quad (3.3)$$

$$\langle u, v \rangle = 2\langle \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}u, t \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}v \rangle, \quad (3.4)$$

$$\langle u, v \rangle = -2\langle \mathcal{P}u, t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{P}v \rangle, \quad (3.5)$$

*où les produits scalaires sont entendus au sens  $L^2$ .*

La définition de l'adjoint d'un opérateur et la régularité des fonctions assurent bien l'équivalence avec le théorème 3.2.1. Remarquons que l'égalité (3.5) utilise les valeurs aux limites de  $\mathcal{P}u$  et  $\mathcal{P}v$  : en effet, puisque  $u$  et  $v$  sont à support dans  $B(0, 1)$  et que la vitesse du son est supposée constante de valeur 1, le principe de Huygens fort assure que :

$$\forall p \in \partial B(0, 1), \forall t \geq 2, \quad \mathcal{P}u(p, t) = \mathcal{P}v(p, t) = 0.$$

Ceci garantit notamment que, dans le cas symétrique (où  $u = v$ ) :

$$\begin{aligned}
2\langle \mathcal{P}u, \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}u \rangle &= \int_{\partial B(0,1)} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( (\mathcal{P}u)^2 \right) (p, t) dt dS(p) \\
&= \int_{\partial B(0,1)} \left( (\mathcal{P}u)^2 \right) (p, 2) - \left( (\mathcal{P}u)^2 \right) (p, 0) dS(p) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

### 3.2.3 Démonstration du théorème 3.2.1

On procède ici en deux étapes. Tout d'abord nous montrons comment le résultat pour tout  $n \geq 2$  peut se déduire des cas  $n = 2$  et  $n = 3$  par une méthode de descente appliquée aux identités de trace. Ensuite nous traitons les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ .

#### Méthode de descente

Notons  $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  les harmoniques sphériques, restrictions à  $\partial B(0, 1)$  de polynômes harmoniques homogènes sur  $\mathbb{R}^n$  de degré  $k(m)$  formant une base orthonormale de  $L^2(\partial B(0, 1))$ , voir [81] pour de plus amples développements. Précisons seulement que si  $\phi$  est la restriction d'un polynôme harmonique homogène de degré  $k$  à  $\partial B(0, 1)$  alors ce dernier s'écrit  $r^k \phi(\theta)$ , où  $r = \|x\|$  et  $\theta = x/\|x\|$ . En outre les harmoniques sphériques sont les vecteurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami :  $\Delta_{\partial B(0,1)} \phi = k(k+n-2)\phi$  sur  $\partial B(0, 1)$ .

Soit  $u_i \in C_0^\infty(B(0, 1))$ ,  $i = 1, 2$ , alors on a la décomposition suivante, au sens  $L^2$  :

$$u_i(r\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{im}(r) r^{k(m)} \phi_m(\theta), \quad r \geq 0, \|\theta\| = 1,$$

avec

$$u_{im}(r) r^{k(m)} = \int_{\partial B(0,1)} u_i(r\theta) \phi_m(\theta) dS(\theta).$$

De la régularité de  $u_i$  et du fait que chaque  $\phi_m$  est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur au sien, nous pouvons déduire que les  $u_{im}(r)$  sont régulières, paires sur  $\mathbb{R}$  et supportées dans  $[-1, 1]$ .

De même, écrivons la décomposition de  $\mathbf{p}_i := \mathcal{P}u_i$ ,  $i = 1, 2$  :

$$\mathbf{p}_i(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im}(r, t) r^{k(m)} \phi_m(\theta),$$

où les  $a_{im}$  héritent naturellement de la régularité de  $\mathbf{p}_i$  en  $x$  et en  $t$ .

Revenons maintenant à l'identité de trace. Grâce à l'orthonormalité des harmoniques sphériques, le membre de gauche de (3.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_{\partial B(0,1)} r^{n-1} u_1(r\theta) u_2(r\theta) \, dS(\theta) \, dr = \\ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} r^{\nu(m)-1} u_{1m}(r) u_{2m}(r) \, dr, \end{aligned}$$

avec  $\nu(m) = 2k(m) + n$ . Quant au membre de droite  $MD$  de (3.5), il s'écrit

$$\begin{aligned} MD &= - \int_0^{\infty} \int_{\partial B(0,1)} t \mathbf{p}_1(p, t) \frac{\partial^2 \mathbf{p}_2}{\partial t^2}(p, t) \, dS(p) \, dt \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\partial B(0,1)} t a_{1m}(1, t) \frac{\partial^2 a_{2l}}{\partial t^2}(1, t) \phi_m(p) \phi_l(p) \, dS(p) \, dt \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t a_{1m}(1, t) \frac{\partial^2 a_{2l}}{\partial t^2}(1, t) \, dt \int_{\partial B(0,1)} \phi_m(\theta) \phi_l(\theta) \, dS(\theta) \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t a_{1m}(1, t) \frac{\partial^2 a_{2l}}{\partial t^2}(1, t) \, dt. \end{aligned}$$

Ainsi, pour prouver (3.5) il suffit de prouver ceci : si les conditions initiales  $u_i$ ,  $i = 1, 2$  sont de la forme  $g_i(r) r^k \phi(\theta)$ , avec les  $g_i$  régulières, paires et supportées dans  $[-1, 1]$ , et  $\phi$  harmonique homogène de degré  $k$  et de norme 1 dans  $L^2(\partial B(0, 1))$ , alors les solutions  $\mathbf{p}_i$ ,  $i = 1, 2$  ont la forme  $a_i(r, t) r^k \phi(\theta)$  et de plus

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} r^{\nu-1} g_1(r) g_2(r) \, dr = - \int_0^{\infty} t a_1(1, t) \frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2}(1, t) \, dt, \quad (3.6)$$

avec  $\nu = n + 2k$ .



Soit à présent  $k$  dans  $\mathbb{N}$  et  $u$  de la forme  $g(r)r^k\phi(\theta)$ , en cherchant  $\mathbf{p} := \mathcal{P}u$  de la forme  $a(r, t)r^k\phi(\theta)$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{\partial^2 ar^k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 ar^k}{\partial r^2} - \frac{n-1}{r} \frac{\partial ar^k}{\partial r} \right) \phi - \frac{ar^k}{r^2} \Delta_{\partial B(0,1)} \phi \\ &= \phi r^k \left( \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} - \frac{n+2k-1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Donc  $a(r, t)$  doit satisfaire :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} - \frac{\nu-1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} = 0 \\ a(\cdot, 0) = 0, \\ a_t(\cdot, 0) = g. \end{array} \right. \quad r \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.7)$$

Il s'agit de l'équation de Darboux, qui est bien posée et admet une solution explicite, donnée à la page 700 de [17]. Elle est résolue à l'aide d'une méthode de descente exploitant le fait que si  $a$  est solution alors  $\frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r}$  l'est également mais avec  $\nu+2$  à la place de  $\nu$  et  $g$  remplacée par  $\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}$ . Ainsi pour chaque  $k$ ,  $\mathcal{P}u$  est bien de la forme  $a(r, t)r^k\phi(\theta)$  lorsque  $u = g(r)r^k\phi(\theta)$ . Il ne nous reste plus qu'à montrer que deux conditions initiales  $g_1$  et  $g_2$  et deux solutions correspondantes de l'équation (3.7)  $a_1$  et  $a_2$  vérifient l'identité de trace (3.6) pour  $\nu = n + 2k$ .

Soit  $n > n_0 \geq 2$  avec  $n$  et  $n_0$  de même parité, et  $k_0 = (n - n_0)/2 + k$  de sorte que  $n_0 + 2k_0 = n + 2k$ , et finalement  $\nu = n + 2k$ . Soit  $\tilde{\phi}$  un polynôme harmonique sphérique de degré  $k_0$  en dimension  $n_0$ . Notons  $a_1$  et  $a_2$  les solutions de (3.7) avec  $\nu = n + 2k$  et les conditions initiales  $g_1$  et  $g_2$ , alors un calcul précédent assure que si  $\mathbf{p}_i = a_i(r, t)r^{k_0}\tilde{\phi}(\theta)$ , alors  $\mathbf{p}_i = \mathcal{P}u_i$ ,  $i = 1, 2$  avec  $u_i = g_i(r, t)r^{k_0}\tilde{\phi}(\theta)$ ,  $i = 1, 2$ . Or si l'on peut démontrer que les  $u_i$  et les

solutions  $\mathbf{p}_i = \mathcal{P}u_i$ , pour  $i = 1, 2$  satisfont (3.5) en dimension  $n_0$ , alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n_0}} u_1(x) u_2(x) \, dx &= - \int_0^\infty \int_{\partial B(0,1)} t \mathbf{p}_1(p, t) \frac{\partial^2 \mathbf{p}_2}{\partial t^2}(p, t) \, dS(p) \, dt \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n_0}} g_1(\|x\|) g_2(\|x\|) \|x\|^{2k_0} \tilde{\phi}(x/\|x\|)^2 \, dx &= \\
&\quad - \int_0^\infty \int_{\partial B(0,1)} t a_1(1, t) \frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2}(1, t) \tilde{\phi}(p)^2 \, dS(p) \, dt \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{\partial B(0,1)} \tilde{\phi}(\theta)^2 \, dS(\theta) r^{\nu-1} g_1(r) g_2(r) \, dr &= \\
&\quad - \int_0^\infty \int_{\partial B(0,1)} \tilde{\phi}(p)^2 \, dS(p) t a_1(1, t) \frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2}(1, t) \, dt \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^\infty r^{\nu-1} g_1(r) g_2(r) \, dr &= - \int_0^\infty t a_1(1, t) \frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2}(1, t) \, dt,
\end{aligned}$$

et l'égalité de trace (3.6) est démontrée pour  $\nu = n_0 + 2k_0 = n + 2k$ . Enfin puisque  $k$  est arbitraire ceci fournit l'identité de trace (3.5) en toute dimension  $n > n_0$  de même parité que  $n_0$ . Nous voyons donc qu'il suffit de démontrer (3.5) en dimensions 2 et 3 pour que la démonstration soit achevée pour tout  $n \geq 2$ .

### Cas $n = 2$ et $n = 3$

Nous allons démontrer ici l'identité de trace (3.5) dans le cas où  $n = 3$ . Pour le cas  $n = 2$ , plus calculatoire mais équivalent dans l'esprit, j'invite le lecteur à se référer à [25]. Remarquons tout d'abord que pour  $u$  et  $v$  dans  $C_0^\infty(B(0, 1))$  l'identité de trace (3.5) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= -2 \langle \mathcal{P}u, t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{P}v \rangle = -2 \langle t \mathcal{P}u, \Delta \mathcal{P}v \rangle \\
&= -2 \langle \mathcal{P}^* \Delta t \mathcal{P}u, v \rangle = -2 \langle \Delta \mathcal{P}^* t \mathcal{P}u, v \rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi grâce au théorème B.1.2 et au fait que  $\mathcal{W} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}$ , il suffit de démontrer la formule d'inversion en dimension 3 fournie dans le théorème 3.2.1, c'est-

à-dire :

$$u(x) = -\Delta \underbrace{\frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial B(0,1)} \frac{R_s u(p, \|x-p\|)}{\|x-p\|} dS(p)}_{H(x)}, \quad x \in \mathcal{B}. \quad (3.8)$$

Plus bas nous aurons besoin de l'observation qui suit. Soit  $\mathcal{M}$  une variété de dimension  $n-1$  contenue dans  $\mathbb{R}^n$ , définie par l'équation  $\phi(z) = 0$ , où  $\phi$  vérifie  $\nabla \phi \neq 0$  sur  $\mathcal{M}$ , alors, si  $\delta$  représente la distribution de Dirac, on a :

$$\int_{\mathcal{M}} h(z) d\mathcal{S}(z) = \int_{\mathbb{R}^3} h(z) \|\nabla \phi(z)\| \delta(\phi(z)) dz.$$

Déroutons à présent le calcul de  $H(x)$ , on a :

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^3} u(y) \delta(\|y-p\|^2 - \|x-p\|^2) dy dS(p) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \int_{\partial B(0,1)} \delta(\|y-p\|^2 - \|x-p\|^2) dS(p) dy \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\|y-p\|^2 - \|x-p\|^2) \delta(\|p\|^2 - 1) dp}_{I_0} dy. \end{aligned}$$

La grandeur  $I_0$  est l'intégrale le long de la courbe d'intersection entre la sphère unité et le plan équidistant de  $x$  et  $y$ . Définissons pour la suite une fonction caractéristique  $\chi(x, y)$  qui vaut 1 lorsque ce plan intersecte la sphère, et s'annule sinon.

Soit à présent  $Q$  la transformation orthogonale qui à  $y-x$  associe  $\|x-y\| \mathbf{e}_3$ , avec  $\mathbf{e}_3 := (0, 0, 1)$ , on a alors  $Qy = Qx + \|x-y\| \mathbf{e}_3$  et un changement de variable orthogonal donne :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\|y - Q^t p\|^2 - \|x - Q^t p\|^2) \delta(\|Q^t p\|^2 - 1) dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\|Qy - p\|^2 - \|Qx - p\|^2) \delta(\|p\|^2 - 1) dp. \end{aligned}$$

Appelons  $P$  le plan équidistant à  $Qx$  et  $Qy$ , il s'agit du plan :

$$P = \left\{ z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z_3 = h := \langle Qx, e_3 \rangle + |x-y|/2 \right\}.$$

De plus :

$$\left\| \nabla_p \left( \|Qy - p\|^2 - \|Qx - p\|^2 \right) \right\| = 2 \|(p - Qy) - (p - Qx)\| = 2\|x - y\|.$$

Ainsi, pour  $x$  et  $y$  tels que  $\chi(x, y) = 1$ ,  $I_0$  peut s'écrire :

$$I_0 = \frac{1}{2 \|x - y\|} \int_{\mathbb{R}^2} \delta(p_1^2 + p_2^2 + h^2 - 1) \, dp_1 \, dp_2.$$

On reconnaît ici l'intégrale le long du cercle de rayon  $\sqrt{1 - h^2}$  et centré en l'origine, et en introduisant la norme du gradient de  $\phi$ , valant ici  $2\sqrt{1 - h^2}$ , l'intégrale vaut  $\pi$ . On trouve finalement :

$$H(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \chi(x, y) \frac{u(y)}{\|x - y\|} \, dy.$$

Rappelons qu'ici  $x$  est pris dans  $B(0, 1)$  et que  $u$  est elle-même à support dans  $B(0, 1)$ , et que donc la fonction caractéristique ne change rien à la valeur de l'intégrale. Appliquant dès lors le Laplacien aux deux membres de la dernière égalité nous obtenons :

$$\Delta H(x) = \frac{-4\pi}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} u(y) \delta(x - y) \, dy = -u(x), \quad x \in B(0, 1),$$

comme voulu.

### 3.2.4 Discussion

Dans [27], les auteurs présentent différentes identités de trace disponibles pour l'équation des ondes (en dimension impaire, mais il est connu depuis qu'elles sont valables en dimension paire). Celles-ci fournissent entre autres un résultat de régularité des données en TTA. En effet les identités de trace sont prolongeables par continuité à  $H_0^1(\mathbb{R}^n)$  et l'on en déduit que la trace d'une solution de l'équation des ondes  $\mathbf{p} \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$  (cadre classique pour une solution faible) sur la sphère unité est dans  $H^1(\partial B(0, 1))$  alors que la trace est usuellement dans  $H^{\frac{1}{2}}(\partial B(0, 1))$ .

La démonstration des formules de rétroprojection filtrée utilise fortement le fait que la fonction  $u$  à reconstruire est à support compact *dans la boule unité*. Même si c'est là une hypothèse naturelle pour la TTA, elle interdit d'inclure dans le modèle d'éventuelles sources extérieures (bruit dans le laboratoire, etc.), qui ici vont perturber violemment les données. De plus dans le cas de données incomplètes (où la surface d'acquisition n'englobe pas totalement l'objet) cette formule est particulièrement instable (voir les reconstructions de [91] par exemple) comme on l'avait déjà prévu par ailleurs dans la section 2.2.5.

Grâce à la continuité des opérateurs impliqués, la rétroprojection filtrée peut s'étendre formellement à des espaces de fonctions moins régulières. Néanmoins la formule n'est alors plus explicite et il est nécessaire de mettre en œuvre, par exemple, des procédés d'approximations, comme dans [37].

### 3.3 Séries de Fourier-Bessel

Cette section est consacrée à l'énoncé et à la démonstration d'une formule d'inversion utilisant la transformée de Fourier en coordonnées polaires. Je m'en tiendrai ici au cas de la dimension 2, historiquement le premier à avoir été traité [70], même si un procédé similaire a été utilisé plus tard avec succès en dimension 3 [71].

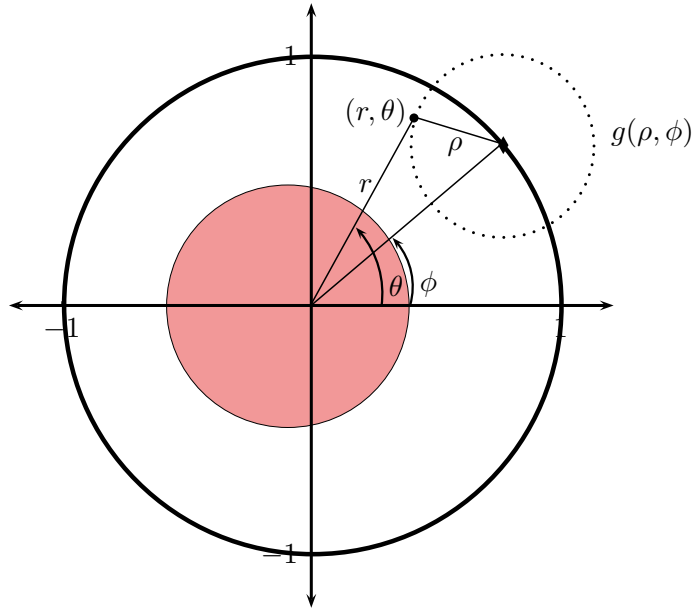


FIGURE 3.2 – Utilisation des coordonnées polaires pour la transformée de Radon circulaire.

La fonction à reconstruire sera exprimée en coordonnées polaires, *i.e.*  $f := f(r, \theta)$  pour  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ , ainsi que sa transformée de Radon sphérique, que nous noterons tout simplement  $g$  :

$$g(\rho, \phi) = \int_{\partial B((\cos(\phi), \sin(\phi)), \rho)} f(r, \theta) \, dS,$$

où  $dS$  est la mesure linéique naturelle pour le cercle. Voir la figure 3.2. Cette définition peut se récrire à l'aide d'une distribution de Dirac comme suit :

$$g(\rho, \phi) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) \delta \left( \sqrt{r^2 + 1 - 2r \cos(\phi - \theta)} - \rho \right) d\theta dr.$$

Voyons comment les séries de Fourier-Bessel de ces fonctions peuvent être reliées.

### 3.3.1 Formule d'inversion de Norton

Dans la suite nous supposons que  $f$  et  $g$  sont toutes deux développables en série harmonique, soit :

$$g(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(\rho) e^{in\phi},$$

où

$$g_n(\rho) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\rho, \phi) e^{-in\phi} d\phi,$$

et

$$f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\theta},$$

où

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Les symétries inhérentes au problème qui nous est posé vont permettre d'exprimer les coefficients  $f_n(r)$  en fonction des  $g_n(\rho)$ . Les fonctions manipulées seront supposées telles que la définition des intégrales intervenant dans le calcul, ainsi que leur interversion par le théorème de Fubini, ne posent aucun problème, typiquement  $C^\infty$  à support compact en la variable radiale. On se propose de démontrer le résultat suivant, issu de [70] :

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $J_k$  la  $k^{\text{ème}}$  fonction de Bessel (voir [86] par exemple). Sous les conditions décrites précédemment, on a la formule d'inversion :*

$$f_n(r) = \mathcal{H}_n \left\{ \frac{1}{J_n(z)} \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{g_n(\rho)}{2\pi\rho} \right\}_z \right\}_r, \quad n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}_+, \quad (3.9)$$

où  $\mathcal{H}_n$  désigne la transformée de Hankel d'ordre  $n$ , définie par :

$$\mathcal{H}_n\{p(r)\}_z := \int_0^\infty p(r) J_n(rz) r \, dr, \quad z \in \mathbb{R}_+.$$

*Démonstration.* D'après la définition, on obtient directement :

$$g_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \int_0^{2\pi} \delta \left( \sqrt{r^2 + 1 - 2r \cos(\phi - \theta)} - \rho \right) e^{-in\phi} \, d\phi \, d\theta \, dr,$$

et le changement de variable  $\phi \leftrightarrow \phi - \theta$  donne :

$$\begin{aligned} g_n(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-in\theta} I(r) \, d\theta \, dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r f_n(r) I(r) \, dr, \end{aligned} \tag{3.10}$$

avec :

$$I(r) := \int_0^{2\pi} \delta \left( \sqrt{r^2 + 1 - 2r \cos(\phi)} - \rho \right) e^{-in\phi} \, d\phi.$$

Notre objectif est d'inverser la relation (3.10) afin d'exprimer les  $f_n$  en fonction des  $g_n$ . Pour évaluer  $I$  nous utilisons l'identité suivante :

$$\delta(\rho' - \rho) = \rho \int_0^\infty J_0(\rho' z) J_0(\rho z) z \, dz,$$

où  $J_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  fonction de Bessel. Il vient alors :

$$\begin{aligned} I(r) &= \rho \int_0^\infty z J_0(\rho z) \int_0^{2\pi} J_0(z \sqrt{r^2 + 1 - 2r \cos(\phi)}) e^{-in\phi} \, d\phi \, dz \\ &= 2\pi \rho \int_0^\infty z J_0(\rho z) J_n(z) J_n(zr) \, dz. \end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé l'identité des fonctions de Bessel suivante (voir [86] par exemple) :

$$2\pi J_n(za) J_n(zb) = \int_0^{2\pi} J_0(z \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\phi)}) e^{-in\phi} \, d\phi.$$

En reportant la valeur de  $I(r)$ , nous arrivons à :

$$g_n(\rho) = 2\pi\rho \int_0^\infty z J_0(\rho z) J_n(z) \mathcal{H}_n \{f_n(r)\}_z \, dz,$$

où nous avons utilisé la transformée de Hankel d'ordre  $n$  :

$$\mathcal{H}_n \{p(r)\}_z := \int_0^\infty p(r) J_n(rz) r \, dr, \quad z \in \mathbb{R}_+,$$

et donc

$$g_n(\rho) = 2\pi\rho \mathcal{H}_0 \{J_n(z) \mathcal{H}_n \{f_n(r)\}_z\}_\rho.$$

Pour inverser la relation obtenue, nous remarquons que la transformée de Hankel est involutive, obtenant finalement :

$$f_n(r) = \mathcal{H}_n \left\{ \frac{1}{J_n(z)} \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{g_n(\rho)}{2\pi\rho} \right\}_z \right\}_r,$$

comme voulu. □

### 3.3.2 Discussion

La mise en œuvre numérique de la transformée de Hankel revient à celle de la transformée de Fourier, à un calcul d'intégrale près, et bénéficie donc de toute l'efficacité de la transformée de Fourier rapide (FFT). On pourra se référer à [70] pour un exemple de calcul numérique sur un exemple simple.

Le résultat est bien évidemment obtenu en tronquant une somme infinie de Fourier, il n'est donc pas surprenant de voir apparaître des phénomènes du type de Gibbs au voisinage des points de discontinuité, comme dans [70].

Un examen rapide de la formule (3.9) montre qu'elle ne peut pas être stable numériquement. En effet, elle implique une division par zéro en chaque zéro  $\lambda_k^n$  de la fonction de Bessel  $J_n$ . En théorie cette division ne pose pas de problème car, la transformée de Hankel de chaque  $f_n$  étant nécessairement bien définie et régulière en tout point, le numérateur s'annule en chacun des  $\lambda_k^n$ . Néanmoins cette propriété, en fait nécessaire et suffisante pour que la fonction  $g$  soit dans l'image de la transformée de Radon Circulaire (voir [2] et section 2.2.3), n'est pas forcément vérifiée par un jeu de données bruitées et, dans ce cas, la division par zéro induira d'importantes erreurs de calcul (quand celui-ci pourra effectivement être mené à bien).



On peut trouver dans [35] une astuce de calcul permettant de contourner cette difficulté et d'obtenir les valeurs de  $\mathcal{H}_n \{f_n(r)\}$  en chaque  $\lambda_k^n$ . En effet, cette fonction s'écrit comme le quotient de deux fonctions dérivables s'annulant en chacun des  $\lambda_k^n$ , il est donc possible d'appliquer la *règle de l'Hôpital* (voir [55]), qui donne :

$$\mathcal{H}_n \{f_n(r)\}_{\lambda_k^n} = \frac{-1}{J'_n(\lambda_k^n)} \mathcal{H}_1 \left\{ \frac{g(\rho)}{2\pi} \right\}_{\lambda_k^n},$$

que l'on peut simplifier grâce à la relation de récurrence des fonctions de Bessel :

$$\mathcal{H}_n \{f_n(r)\}_{\lambda_k^n} = \frac{1}{J_{n+1}(\lambda_k^n)} \mathcal{H}_1 \left\{ \frac{g(\rho)}{2\pi} \right\}_{\lambda_k^n}.$$

Or il est connu que les  $\lambda_k^n$  ne sont pas des zéros de  $J_{n+1}$ , ainsi le calcul du quotient est rendu stable.

### 3.4 Transformée de Fourier et surface d'acquisition plane

La section précédente montre qu'à condition de tenir compte des symétries sphériques du problème, l'utilisation de la transformée de Fourier s'avère fructueuse. Nous allons voir ici que, lorsque la surface d'acquisition est un plan, il s'agit d'une approche à ne pas négliger. En effet dans cette situation, à condition de considérer le plan infini, la connaissance de la transformée de Radon sphérique permet l'estimation de la transformée de Fourier de l'objet à reconstruire, et il ne reste plus qu'à utiliser les méthodes extrêmement efficaces disponibles pour l'inversion de cette dernière.

Dans un premier temps, je présenterai une formule que l'on peut voir comme l'équivalent sphérique du *Fourier Slice Theorem* établi pour la transformée de Radon classique (annexe B). Outre les horizons qu'elle ouvre pour l'étude spectrale du problème inverse de la TTA, cette identité peut-être vue comme la source de formules d'inversion, exactes ou approchées, pour la transformée de Radon Sphérique, dont nous donnerons deux exemples dans la suite. Enfin nous verrons qu'une astuce technique permet de passer outre la taille finie du plan d'acquisition en pratique, grâce à l'utilisation de réflecteurs.

### 3.4.1 La "Fourier-shell identity"

Dans [6] est établie une identité reliant les transformées de Fourier d'une solution de l'équation des ondes et de sa condition initiale. Soit  $\mathbf{p}$  la solution du problème de Cauchy (2.10) avec la condition initiale  $u$ , définissons les transformée de Fourier en temps et en espace de ces objets par :

$$\mathcal{F}_t \mathbf{p}(x, k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p}(x, t) e^{-ikt} dt, \quad (x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

et

$$\mathcal{F}_x u(\nu) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i\langle x, \nu \rangle} dx, \quad \nu \in \mathbb{R}^n.$$

Supposons que  $u$  soit à support compact dans un ouvert régulier  $\Omega$  de frontière  $\mathcal{S}$ , alors on a l'identité suivante :

**Théorème 3.4.1** (Fourier-shell identity). *Pour chaque  $\nu \in \mathbb{R}^n$  se décomposant  $\nu = ks$ , avec  $k \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\|s\| = 1$ , on a :*

$$\mathcal{F}_x u(\nu) = \frac{i}{k(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathcal{S}} \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{n}}(\omega, k) + ik \langle \mathbf{n}, s \rangle \mathcal{F}_t \mathbf{p}(\omega, k) \right] e^{-ik \langle s, \omega \rangle} d\mathcal{S}(\omega), \quad (3.11)$$

où  $\mathbf{n}$  représente la normale extérieure unitaire à  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* Grâce au principe de Duhamel (voir [17]),  $\mathcal{F}_t \mathbf{p}$  vérifie :

$$(\Delta + k^2) \mathcal{F}_t \mathbf{p}(x, k) = -\frac{ik}{2\pi} u(x), \quad (x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

En outre, si  $s \in \mathbb{R}^n$  satisfait  $\|s\| = 1$ , l'onde plane  $e^{-ik \langle s, x \rangle}$  vérifie la même équation de Helmholtz, mais homogène :

$$(\Delta + k^2) e^{-ik \langle s, x \rangle} = 0, \quad (x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Ainsi une combinaison linéaire de ces deux équations permet d'éliminer le terme en  $k^2$  et donne :

$$e^{-ik \langle s, x \rangle} \Delta \mathcal{F}_t \mathbf{p}(x, k) - \mathcal{F}_t \mathbf{p}(x, k) \Delta e^{-ik \langle s, x \rangle} = -\frac{ik}{2\pi} u(x) e^{-ik \langle s, x \rangle}.$$

En intégrant cette dernière égalité sur  $\Omega$  et en utilisant la formule de Green on obtient directement (3.11), puisque  $u$  est à support dans  $\Omega$ .  $\square$

## Commentaires

L'identité (3.11) s'applique à une grande variété d'ouverts  $\Omega$ , y compris n'importe quel demi-espace, et dans ce cas  $\mathcal{S}$  est un plan infini. Néanmoins cette généralité a un prix : il n'existe pas dans la TTA de données donnant directement accès à la dérivée normale de  $\mathbf{p}$ , il faut donc, quand la surface d'acquisition le permet, établir cette dérivée *analytiquement* à partir des données mesurées.

Il est montré dans [6] que (3.11) permet de retrouver les formules d'inversion en géométrie sphérique présentes dans [70] (voir la section précédente), et [71]. De même, à partir de la Fourier-shell identity on peut reformuler les formules d'inversion déjà connues, pour des surfaces d'acquisition diverses.

Outre les formules d'inversion exactes, l'identité (3.11) permet d'étudier les propriétés spectrales du problème de la TTA. En effet, une des causes fréquentes de mauvaise qualité de la reconstruction réside dans une réponse impulsionnelle imparfaite des capteurs utilisés. En termes mathématiques, cela signifie qu'au lieu d'avoir accès directement aux mesures  $\mathbf{p}(\omega, t)$  pour chaque  $\omega \in \mathcal{S}$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ , on dispose seulement de la convolée en temps de ce signal par un noyau régularisant  $\mathbf{g}$ . Or l'identité (3.11) permet de voir que la convolution en temps du signal mesuré correspond exactement à un échange de l'objet à reconstruire  $u_{\text{init}}$  par un nouvel objet  $u_{\text{nouv}}$  vérifiant :

$$\mathcal{F}_x u_{\text{nouv}}(\nu = ks) = \mathcal{F}_t \mathbf{g}(k) \mathcal{F}_x u_{\text{init}}(\nu = ks), \quad k \in \mathbb{R}_+, s \in \partial B(0, 1).$$

J'ai déjà évoqué un résultat semblable dans l'annexe B, bien qu'il parte de la convolution en espace de l'objet pour aboutir à une transformation sur les données.

### 3.4.2 Formule d'inversion

Plaçons nous dans  $\mathbb{R}^3$  et supposons à présent que la surface d'acquisition  $\mathcal{S}$  soit le plan :

$$\mathcal{S} := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \right\}.$$

De plus supposons que l'objet à reconstruire  $u$  soit à support compact contenu dans le demi-espace  $\{x_3 > 0\}$ . Dans ce cas précis les données dont nous disposons sont :

$$\mathbf{p}(x_1, x_2, 0, t), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}_+,$$

que l'on peut étendre par parité aux temps  $t < 0$ . Ainsi il est possible de concevoir une transformée de Fourier en deux dimensions pour les données comme suit :

$$\tilde{\mathbf{p}}(\nu_1, \nu_2, t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{p}(x_1, x_2, 0, t) e^{-i(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)} dx_1 dx_2, \quad (\nu, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

Alors on a la relation suivante :

**Proposition 3.4.2** ([90, 6]). *Pour chaque  $k > 0$  et chaque  $s := (s_1, s_2, s_3)$  tel que  $s_3 \geq 0$  et  $\|s\| = 1$ , on a :*

$$\mathcal{F}_x u(\nu = ks) = 2s_3 \mathcal{F}_t \tilde{\mathbf{p}}(ks_1, ks_2, k).$$

Puisque  $u$  est réelle, on peut prolonger par conjugaison sa transformée de Fourier aux points où  $s_3 < 0$ . Ainsi les données du problème de la TTA donnent accès, dans ce cas, à la connaissance complète de la transformée de Fourier de l'objet à reconstruire. L'inversion est alors aisée.

Notons que lorsqu'on utilise des grilles cartésiennes régulières pour la discrétisation du problème, cette formule impose l'utilisation d'une interpolation dans le processus d'inversion à cause du passage de coordonnées cartésiennes à des coordonnées sphériques.

Il est possible d'établir des formules équivalentes pour diverses surfaces d'acquisition. Voir [92] pour un cylindre, [87] pour une sphère dans une version approchée. De plus on dispose d'un équivalent en deux dimensions de cette formule d'inversion (voir [51]) :

**Proposition 3.4.3.** *Soit  $\mathbf{p}$  une solution du problème de Cauchy (2.14) avec  $u$  comme condition initiale, prolongée par parité à tout temps. Supposons  $\mathbf{p}$  connue pour tout temps sur l'axe :*

$$\mathcal{S} := \{(x_1, 0) | x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

*En outre supposons  $u$  à support compact dans l'ouvert  $\{x_2 > 0\}$ . Finalement définissons :*

$$\tilde{\mathbf{p}}(\nu_1, t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{p}(x_1, 0, t) e^{-i x_1 \nu_1} dx_1, \quad \nu_1 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

*Alors on a :*

$$\mathcal{F}_x u(\nu = ks) = |s_2| \mathcal{F}_t \tilde{\mathbf{p}}(ks_1, k \operatorname{sgn}(s_2)), \quad k > 0, s \in \partial B(0, 1), \quad (3.12)$$

*où  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  est la fonction signe.*

### 3.4.3 Utilisation de réflecteurs

Les formules fournies dans cette section semblent plaider en faveur d'une surface d'acquisition plane en TTA. En effet, la simple adjonction d'une interpolation et d'applications de la FFT permet d'inverser efficacement le problème. Néanmoins il a toujours été supposé ici que le plan d'acquisition était *infini*, or en pratique les coûts de réalisation ne permettent même pas de disposer d'une surface de détecteurs assez étendue pour approcher convenablement le modèle théorique.

Deux difficultés sont alors à prendre en compte. Premièrement nous savons (voir la section 2.2.5) que la reconstruction ne peut pas être stable, puisque un grand nombre de raies bicaractéristiques (ici des droites passant par l'objet) n'intersectent pas la surface d'acquisition : les discontinuités de l'objet ne peuvent donc pas être reconstruites. Le deuxième obstacle concerne les conséquences de la discrétisation. En effet, la FFT traite les données comme si elles provenaient de fonctions périodiques, aussi le processus d'inversion agit-il comme si l'objet  $u$  était la restriction à  $B(0, 1)$  d'une application périodique. Or les données mesurées proviennent quant à elle d'une version de  $u$  *non périodisée*, nulle en dehors de la boule unité : une distorsion lors de la reconstruction s'en suit nécessairement.

Il a été proposé dans [18] de contourner ces difficultés grâce à l'installation, autour de l'objet, de parois parfaitement réfléchissantes (voir la figure 2.4). Les raies bicaractéristiques se réfléchissant selon les lois de l'optique sur les parois, on voit que dans ce dispositif seules les raies horizontales n'atteignent jamais la surface d'acquisition. Ainsi un plus grand nombre de discontinuités de l'objet pourront être reconstruites de manière stable. En outre les capteurs mesurent ici un signal qui semble réellement provenir d'un objet périodique (voir la figure 2.4), ce qui annule la distorsion décrite plus haut. Les résultats numériques de [18] vont dans ce sens.

## 3.5 Utilisation de l'équation de Helmholtz

Il est possible d'explicitement une solution au problème de l'inversion de la transformée de Radon sphérique sous forme de série convergeant dans  $L^2$ , et ce grâce à l'étude de l'équation de Helmholtz, l'équivalent dans le domaine fréquentiel de l'équation des ondes. Afin que cette inversion puisse être menée à bien, nous avons besoin de la connaissance des vecteurs propres de l'opé-

rateur de Laplace sur la surface  $\mathcal{S}$  où sont placés les capteurs, connaissance bien établie pour certaines surfaces classiques comme la sphère ou le cube.

### 3.5.1 Formule d'inversion

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$  à bord régulier  $\mathcal{S} := \partial\Omega$ . La fonction à reconstruire  $f$  sera ici considérée comme appartenant à  $C_0^1(\Omega)$ . On notera  $g$  sa transformée de Radon sphérique, définie par :

$$g(z, r) = \int_{\partial B(0,1)} f(z + ry) r^{n-1} dS(y), \quad z \in \mathcal{S}, r \in \mathbb{R}_+.$$

Soit donc  $\lambda_m^2$  et  $u_m(x)$  respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres normalisés de l'opérateur de Laplace  $-\Delta$  sur  $\Omega$  avec des conditions aux limites nulles, i.e. :

$$\begin{cases} \Delta u_m(x) + \lambda_m^2 u_m(x) = 0 & , \quad x \in \Omega \\ u_m(x) = 0 & , \quad x \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (3.13)$$

et

$$\|u_m\|_{L^2} = 1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Si l'on note  $\Phi_{\lambda_m}$  les fonctions de Green de l'équation de Helmholtz (3.13), alors les solutions du problème ci-dessus admettent la représentation de Helmholtz suivante :

$$u_m(x) = \int_{\mathcal{S}} \Phi_{\lambda_m}(\|x - z\|) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_m(z) d\mathcal{S}(z), \quad x \in \Omega. \quad (3.14)$$

Dès lors, nous utilisons le fait que les vecteurs propres  $(u_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$  forment une base orthonormale de  $L^2(\Omega)$ , si bien que  $f$  admet la représentation suivante :

$$f \stackrel{L^2}{=} \sum_0^\infty \alpha_m u_m, \quad (3.15)$$

où

$$\alpha_m := \int_{\Omega} u_m(x) f(x) dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Mieux, puisque  $f \in C_0^1(\Omega)$ , l'égalité reste vraie point par point. La formule d'inversion découlera de l'injection de (3.14) dans (3.15) et d'une interversion

des intégrales. On a :

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= \int_{\Omega} u_m(x) f(x) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \left( \int_{\mathcal{S}} \Phi_{\lambda_m}(\|x - z\|) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_m(z) \, d\mathcal{S}(z) \right) f(x) \, dx \\
&= \int_{\mathcal{S}} \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_{\lambda_m}(\|x - z\|) f(x) \, dx}_{I(z, \lambda_m)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_m(z) \, d\mathcal{S}(z)
\end{aligned}$$

Finalement, la fonction  $I$  s'exprime aisément en fonction de la transformée de Radon sphérique  $g$  de  $f$  :

$$\begin{aligned}
I(z, \lambda_m) &= \int_{\Omega} \Phi_{\lambda_m}(\|x - z\|) f(x) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\lambda_m}(\|x - z\|) f(x) \, dx, \quad \text{car } f \text{ est à support dans } \Omega \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\lambda_m}(\|x\|) f(x + z) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\partial B(0,1)} \Phi_{\lambda_m}(r) f(z + ry) r^{n-1} \, dS(y) \, dr \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} g(z, r) \Phi_{\lambda_m}(r) \, dr.
\end{aligned}$$

Ce qui fait que l'on peut calculer les coefficients  $\alpha_m$  à partir de la donnée de  $g$  sur  $\mathcal{S}$ , puisqu'il suffit de calculer une somme tronquée de (3.15) pour approcher  $f$ .

### 3.5.2 Commentaires

Un des grands avantages de cette approche par rapport à toutes les autres présentées ici reste, outre la variété de surfaces d'acquisition possible, qu'elle est encore valable pour une application  $f$  dans  $L^2$  non forcément régulière, on peut néanmoins supposer que dans ce cas les coefficients  $\alpha_m$ , à la manière de coefficients de Fourier, décroîtront moins vite vers 0, rendant les troncatures moins précises.

On peut remarquer également que l'équation de Helmholtz ne joue pas un rôle essentiel dans les calculs, bien que l'on sache le lien fort qui la relie à l'équation des ondes à la base de notre problème. En effet il suffit pour pouvoir mener cette inversion de disposer d'une base hilbertienne de  $L^2$  se

soumettant à une représentation du type de (3.14) faisant intervenir des fonctions radiales.

Dans [49], on trouvera des résultats numériques qui semblent plaider en faveur de cette méthode en ce qui concerne la vitesse de calcul. La comparaison avec une rétroprojection est sans appel : un exemple fourni dans le même article a coûté 7 heures de calcul avec cette dernière contre à peine 7 *secondes* pour la méthode présentée ici, sur un ordinateur moins puissant.

Voyons comment rendre la comparaison avec la rétroprojection plus parlante, partant de la représentation (3.15) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_0^\infty \alpha_m u_m(x) \\ &= \int_{\mathcal{S}} \left( \sum_0^\infty \alpha_m \Phi_{\lambda_m}(\|x - z\|) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_m(z) \right) d\mathcal{S}(z) \\ &= \int_{\mathcal{S}} h(z, \|x - z\|) d\mathcal{S}(z), \end{aligned}$$

où

$$h(z, t) := \sum_0^\infty \alpha_m \Phi_{\lambda_m}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_m(z), \quad z \in \mathcal{S}, t \in \mathbb{R}_+,$$

est un filtrage intervenant dans cette formule qui relève clairement de la rétroprojection. Nous constatons ici que la méthode présentée approche ce filtrage tandis que la rétroprojection utilise une forme exacte, et que de plus la définition de  $h$  n'utilise que la valeur  $z$  où elle est calculée, et pas dans un voisinage entier comme dans le cas de la rétroprojection classique.

En outre, notons que cette formule a le grand avantage de permettre une reconstruction en présence de sources extérieures. En effet si  $f$  est la restriction à  $\Omega$  d'une fonction  $F$  dans  $C_0^1(\Omega_1)$ , avec  $\bar{\Omega} \subset \Omega_1$ , et si  $F$  est nulle sur  $\mathcal{S}$ , alors en étendant les applications  $u_m$  à tout  $\mathbb{R}^n$  par zéro, les calculs restent inchangés et la reconstruction de  $f$  reste la même. Les essais présentés dans [49] valident ce résultat.

Finalement, signalons que l'auteur de [49] s'est intéressé avec succès à l'utilisation de telles techniques hilbertiennes dans la situation de données incomplètes. Il fournit dans [50] un procédé d'inversion par approximation numérique efficace, bien que ne pouvant être classé sous l'étiquette 'formule d'inversion explicite', et qui s'applique dans toute situation de données incomplètes où la condition de visibilité est satisfaite, rendant théoriquement (et du coup pratiquement) l'inversion stable (voir la section 2.2.5).



## Annexe C

# Formules supplémentaires

### C.1 Une rétroprojection filtrée

Je fournis ici les formules d'inversion de la transformée de Radon sphérique données pour tout  $n \geq 2$  par le théorème 3.2.1. Pour cela il est préférable de séparer le cas des dimensions paires et impaires, comme pour les résultats du théorème B.1.2, sur lesquels s'appuie ce qui suit.

#### Cas de $n$ impair

Nous définissons les deux opérateurs suivants pour  $n$  impair :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}: \quad C_0^\infty(B(0,1)) &\longrightarrow \tilde{C}^\infty \\ u &\longmapsto \frac{1}{t\omega_n} R_s u(x, t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}: \quad \tilde{C}^\infty &\longrightarrow \tilde{C}^\infty \\ G &\longmapsto \left( \frac{1}{2t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} G \end{aligned}$$

En particulier pour  $n = 3$  on a  $\mathcal{D} = \mathcal{I}$ .

Un calcul simple fournit les adjoints dans  $L^2$  de ces opérateurs. En effet, pour  $G$  dans  $\tilde{C}^\infty$ , en utilisant le changement de variable  $y = p + t\theta$ , on

obtient :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{N}f, G \rangle &= \int_{\partial B(0,1)} \int_0^\infty \mathcal{N}f(p, t) G(p, t) dt dS(p) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \int_0^\infty \int_{\partial B(0,1)} t^{n-2} f(p + t\theta) G(p, t) dS(\theta) dt dS(p) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\partial B(0,1)} f(y) \frac{G(p, \|p - y\|)}{\|p - y\|} dS(p) dy \\
&= \langle f, \mathcal{N}^*G \rangle
\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{N}^*G(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \frac{G(p, \|p - x\|)}{\|p - x\|} dS(p), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

On s'aperçoit, comme déjà annoncé, qu'appliquer l'adjoint de la transformée de Radon sphérique (dont  $\mathcal{N}$  n'est qu'une légère modification) revient à sommer toutes les intégrations le long de sphères passant par un point.

De même on obtient

$$\mathcal{D}^*G(p, t) = (-1)^{\frac{n-3}{2}} t \mathcal{D}(G(p, t)/t), \quad (p, t) \in \partial B(0, 1) \times \mathbb{R}_+^*$$

Les régularités idoines des fonctions rencontrées ne posent ici aucun problème, les espaces de définition ont été choisis pour cela.

Alors le théorème 3.2.1 peut se récrire en termes de transformée de Radon sphérique (comme dans [26]) :

**Théorème C.1.1.** *Soit  $n \geq 3$  un entier impair,  $u$  dans  $C_0^\infty(B(0, 1))$ , et supposons connue  $R_s u$  sur  $\partial B(0, 1) \times \mathbb{R}_+$  tout entier, alors on a les formules d'inversion explicites suivantes :*

$$u(x) = -\frac{\pi}{2\Gamma(n/2)^2} (\mathcal{N}^* \mathcal{D}^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} t \mathcal{D} \mathcal{N} u)(x), \quad x \in B(0, 1),$$

$$u(x) = -\frac{\pi}{2\Gamma(n/2)^2} (\mathcal{N}^* \mathcal{D}^* \frac{\partial}{\partial t} t \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} \mathcal{N} u)(x), \quad x \in B(0, 1),$$

$$u(x) = -\frac{\pi}{2\Gamma(n/2)^2} \Delta_x (\mathcal{N}^* \mathcal{D}^* t \mathcal{D} \mathcal{N} u)(x), \quad x \in B(0, 1).$$

### Cas de $n$ pair

Toujours en s'inspirant du théorème B.1.2, définissons, pour  $n$  pair, les opérateurs :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}: C_0^\infty(B(0,1)) &\longrightarrow \tilde{C}^\infty \\ u &\longmapsto \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^t \frac{R_s u(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{D}}: \tilde{C}^\infty &\longrightarrow \tilde{C}^\infty \\ G &\longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n}{2}} G.\end{aligned}$$

Alors le calcul suivant, reposant sur le théorème de Fubini et sur un changement de variables sphériques, fournit l'expression de l'adjoint dans  $L^2$  de  $\mathcal{M}$  :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{M}u, G \rangle &= \int_{\partial B(0,1)} \int_0^\infty \mathcal{M}f(p, t) G(p, t) dt dS(p) \\ &= \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial B(0,1)} \int_0^\infty \int_0^t \frac{R_s u(p, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr G(p, t) dt dS(p) \\ &= \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial B(0,1)} \int_0^\infty R_s u(p, r) \int_r^\infty \frac{G(p, t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt dr dS(p) \\ &= \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^n} u(p+y) \int_{\|y\|}^\infty \frac{G(p, t)}{\sqrt{t^2 - \|y\|^2}} dt dy dS(p) \\ &= \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \int_{\partial B(0,1)} \int_{\|y-p\|}^\infty \frac{G(p, t)}{\sqrt{t^2 - \|y-p\|^2}} dt dS(p) dy \\ &= \langle u, \mathcal{M}^* G \rangle\end{aligned}$$

avec :

$$\mathcal{M}^* G(x) := \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial B(0,1)} \int_{\|x-p\|}^\infty \frac{G(p, t)}{\sqrt{t^2 - \|x-p\|^2}} dt dS(p), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Il est possible alors d'énoncer le :

**Théorème C.1.2.** *Soit  $n \geq 2$  un entier pair,  $u$  dans  $C_0^\infty(B(0,1))$ , et supposons connue  $R_s u$  sur  $\partial B(0,1) \times \mathbb{R}_+$  tout entier, alors on a les formules d'inversion explicites suivantes :*

$$u(x) = -(\mathcal{M}^* \tilde{\mathcal{D}}^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} t \tilde{\mathcal{D}} \mathcal{M} u)(x), \quad x \in B(0,1),$$

$$u(x) = -(\mathcal{M}^* \tilde{\mathcal{D}}^* \frac{\partial}{\partial t} t \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{D}} \mathcal{M} u)(x), \quad x \in B(0,1),$$

$$u(x) = -\Delta(\mathcal{M}^* \tilde{\mathcal{D}}^* t \tilde{\mathcal{D}} \mathcal{M} u)(x), \quad x \in B(0,1).$$

Malgré leur intérêt théorique, ces formules ont le mauvais goût d'impliquer des intégrations le long d'intervalles infinis, difficilement calculables numériquement. On peut trouver dans [25] un résultat palliant à cela. Définissons l'opérateur :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}: \quad \tilde{C}^\infty &\longrightarrow \tilde{C}^\infty \\ G &\longmapsto \left( \frac{1}{2t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{n-2} G \end{aligned}$$

ainsi que  $\mathcal{N}$  désignant le même opérateur que dans le cas  $n$  impair, mais pour un  $n$  pair. Alors :

**Théorème C.1.3.** *Soit  $n \geq 2$  un entier pair,  $u$  dans  $C_0^\infty(B(0,1))$ , et supposons connue  $R_s u$  sur  $\partial B(0,1) \times \mathbb{R}_+$  tout entier, et définissons la constante :*

$$c_n := (-1)^{\frac{n-2}{2}} 2\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \pi^{\frac{n}{2}}.$$

*Alors on a la formule d'inversion explicite suivante :*

$$u(x) = \frac{1}{c_n} \Delta \int_{\partial B(0,1)} \int_0^2 \log \left| t^2 - \|x - p\|^2 \right| \left( t \bar{\mathcal{D}} \mathcal{N} \right) (p, t) dt dS(p).$$

## Chapitre 4

# Régularisation par mollification

### Présentation

Bien que justes en algèbre exacte et sans échantillonnage en espace des mesures, les formules d'inversion exactes du chapitre 3 peuvent se révéler très instables en présence de bruit dans les données. Pour cause, elles reposent grandement sur le fait que les mesures se situent dans l'image de l'opérateur de Radon sphérique. S'il est possible pour certaines d'entre elles d'inclure une régularisation en tronquant une somme infinie (comme dans la section 3.5), les effets d'une telle procédure, ainsi que l'a priori introduit dans le problème, restent obscurs. En particulier, bien que l'objet reconstruit par cette troncature soit une approximation de la solution exacte du problème, sa relation avec cette dernière est peu claire.

La méthode dite de l'*approximate inverse*, introduite par Louis et Maaß dans [61] (voir également [58, 59]) consiste à approcher la solution d'un problème inverse par une version mollifiée de l'objet à reconstruire. Elle a depuis été appliquée avec succès à différents problèmes inverses, tels l'imagerie à rayons X (voir [62, 60]), l'échographie (voir [1]) ou encore le sonar dans [78]. Au vu des discussions précédentes (les sections 1.2.3, 2.2.2 et 2.6) on comprend bien qu'en cherchant à reconstruire un objet plus régulier, on diminue l'impact sur le processus de reconstruction des propriétés régularisantes de l'opérateur à inverser.

Supposons que l'on cherche à résoudre :

$$\mathcal{A}f = g,$$

où  $\mathcal{A}$  est un opérateur compact défini sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Supposons de plus que l'on dispose d'une suite de noyaux  $(\phi_\beta)_{\beta>0}$  vérifiant :

$$f_\beta := f * \phi_\beta \longrightarrow f, \quad \text{lorsque } \beta \downarrow 0,$$

au sens  $L^2$ . Alors en remarquant que :

$$f_\beta(y) = \langle f, \phi_\beta(\cdot - y) \rangle, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

on définit, lorsque c'est possible, la suite de *noyaux de reconstruction*  $(\psi_\beta^y)_{\beta>0}$  comme solutions de :

$$\mathcal{A}^* \psi_\beta^y = \phi_\beta(\cdot - y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

de sorte que, si  $g$  est effectivement dans l'image de  $\mathcal{A}$ , on a :

$$\langle g, \psi_\beta^y \rangle = \langle \mathcal{A}f, \psi_\beta^y \rangle = \langle f, \phi_\beta(\cdot - y) \rangle = f_\beta(y).$$

Ainsi l'on peut approcher la solution  $f$  du problème par l'application de simples produits scalaires aux données  $g$ , et le paramètre  $\beta$  agit ici comme un paramètre de régularisation. Ce raisonnement peut être aisément adapté au cas où  $g \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  et  $\phi_\beta(\cdot - y) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{*\dagger})$ , et dans cette situation l'équation (4.1) peut être résolue au sens des moindres carrés, fournissant une approximation  $\tilde{f}_\beta$  de  $\mathcal{A}^\dagger g$ . Bien évidemment, tout l'effort de cette méthode réside dans la résolution de (4.1). Néanmoins il s'agit d'un problème débarrassé de tout bruit et qu'il est souvent possible de résoudre analytiquement (voir [37] pour une application à la TTA). Heuristiquement, la méthode est stable lorsque la convolution par le noyau  $\phi_\beta$  est aussi régularisante que l'application de l'opérateur  $\mathcal{A}$ . Or, dans le cas où  $(\phi_\beta)_{\beta>0}$  est une approximation de l'unité par exemple, il va de soi qu'à mesure que le paramètre  $\beta$  tend vers 0 la convolution par  $\phi_\beta$  est de moins en moins régularisante, rendant le processus instable numériquement. Il convient donc de bien choisir  $\beta$  afin d'obtenir, de manière aussi stable que possible, une bonne approximation de la solution.

Le travail présenté ci-dessous est à classer dans la même catégorie que la méthode de l'*approximate inverse*. Il concerne une méthode variationnelle appelée *régularisation par mollification*, qui fut introduite par Lannes *et al* en 1987 [52] dans le contexte de la déconvolution des signaux et des

images. Sa formulation fait apparaître un terme de régularisation (voir la section 1.2.5) choisi pour forcer la solution à être régulière, en même temps que les données sont traitées afin de paraître issues d'un objet mollifié, et donc régulier. Là encore, le paramètre de régularisation pertinent est un réel  $\beta$  indexant une famille de noyaux  $(\phi_\beta)$ , et pouvant être interprété comme le niveau de résolution de l'image à reconstruire.

La régularisation par mollification a d'abord été appliquée à la synthèse de Fourier, où il s'agit de reconstruire un objet à support compact  $f_0 \in L^2(V)$  à partir de la connaissance de sa transformée de Fourier tronquée  $T_W f_0 := \mathbb{1}_W \mathcal{F} f_0$  (ici  $V$  et  $W$  sont deux ouverts bornés non vides de  $\mathbb{R}^n$ ). Dans ce contexte, la méthode peut être résumée comme suit :

- Étape 1 : Choisir une réponse impulsionnelle  $\phi_\beta \in L^1(\mathbb{R}^n)$  de masse totale 1 ;
- Étape 2 : Définir le nouvel objet à reconstruire comme une version basse résolution de l'objet original  $f_0$ , soit  $\phi_\beta * f_0$ , ainsi qu'un ensemble compact  $V_1 \supset V$  destiné à contenir l'essentiel du support de  $\phi_\beta * f_0$  ;
- Étape 3 : Remplacer la donnée  $g$  par la donnée régularisée  $\hat{\phi}_\beta g$ . Cette étape se justifie de la manière suivante : si  $g$  est une bonne approximation de la transformée de Fourier tronquée  $T_W f_0$  de l'objet  $f_0$ , alors  $\hat{\phi}_\beta g$  sera une approximation de la transformée de Fourier tronquée de  $\phi_\beta * f_0$  ;
- Étape 4 : Finalement, définir l'image reconstruite comme la solution du problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_\beta) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|_{L^2(W)}^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (1 - \hat{\phi}_\beta) f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V_1). \end{array} \right.$$

Le choix de la fonctionnelle à minimiser dans  $(\mathcal{P}_\beta)$  s'explique de la manière suivante. En notant  $C_\beta$  l'opérateur de convolution par  $\phi_\beta$ , l'objet  $f$  se décompose en une *composante basses-fréquences*  $C_\beta f$  et une *composante hautes-fréquences*  $(I - C_\beta)f$ , où  $I$  désigne l'identité. Dès lors, la fonctionnelle contraint chacune de ces composantes en les dissociant autant que possible : le terme d'adéquation aux données (régularisées) contraint  $f$  dans le domaine basses-fréquences, tandis que le terme de régularisation contraint  $f$  dans le domaine hautes-fréquences.

Malgré une abondante littérature sur la synthèse de Fourier, le problème de la cohérence asymptotique de ce schéma lorsque le paramètre de résolution  $\beta \downarrow 0$  n'a été étudié que récemment par Alibaud *et al* [4]. On peut citer le résultat suivant.

**Théorème 4.0.4.** *Si la famille  $(\phi_\beta)_{\beta>0}$  est une approximation de l'identité, alors :*

- I. Soit  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  fixés. Alors  $(\mathcal{P}_\beta)$  admet une unique solution  $f_\beta$ . De plus,  $f_\beta$  dépend continûment de  $g \in L^2(W)$ .*
- II. Supposons en outre que  $\hat{\phi}_\beta(\xi) \neq 1$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , et que l'on peut trouver deux réels positifs  $K$  et  $s$  tels que  $|1 - \hat{\phi}_\beta(\xi)| \sim_{\xi \rightarrow 0} K \|\xi\|^s$ . Si  $g \in \text{ran } T_W$  est tel que  $\tilde{g} = \mathcal{F}T_W^\dagger g$  satisfait*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^{2s} |\tilde{g}(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

*alors  $f_\beta$  converge fortement vers  $T_W^\dagger g$  dans  $L^2(V)$ , quand  $\beta \downarrow 0$ .*

Entre autres choses, ce théorème affirme que le paramètre  $\beta$ , indexant la famille de noyaux mollifiant, devient dans ce schéma le paramètre de régularisation pertinent, et non plus le paramètre  $\alpha$  réglant l'équilibre entre le terme d'attache aux données et le terme de régularisation.

L'article qui suit présente un travail réalisé en collaboration avec Pierre Maréchal visant à étendre cette méthode au cas des opérateurs compacts. Outre le problème du comportement asymptotique du problème :

$$(\mathcal{P}_\beta) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \|\Phi_\beta g - \mathcal{A}f\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \|(I - C_\beta)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V_1), \end{array} \right.$$

il a fallu résoudre la question du traitement des données (de leur mollification). En effet, si dans le cas particulier de la transformée de Fourier il est immédiat de voir qu'il suffit de multiplier  $g$  par  $\hat{\phi}_\beta$ , il en va tout autrement pour un opérateur plus général  $\mathcal{A} : L^2(V) \rightarrow G$ . Idéalement, il conviendrait d'exhiber un opérateur  $\Phi_\beta \in \mathcal{L}(G)$  vérifiant :

$$\Phi_\beta \mathcal{A} = \mathcal{A} C_\beta.$$

Néanmoins un tel opérateur n'existe pas toujours, et c'est pourquoi nous avons proposé de définir  $\Phi_\beta$  comme solution de :

$$(\mathcal{Q}_\beta) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \|\mathcal{A} C_\beta - X \mathcal{A}\|^2 \\ \text{s.c.} \quad X \in L(G), \quad X = 0 \text{ sur } (\text{ran } \mathcal{A})^\perp. \end{array} \right.$$

L'existence d'une telle solution et, éventuellement, son expression sont traités plus précisément dans l'annexe D.



Le principal résultat de ce travail est l'extension du théorème de Alibaud et al :

**Théorème 4.0.5.** *Considérons le problème  $(\mathcal{P}_\beta)$  et une approximation de l'identité  $(\phi_\beta)$  définis comme précédemment.*

- I. Soit  $\alpha > 0$  et  $\beta \in ]0, 1]$  fixés. Supposons que le problème  $(\mathcal{Q}_\beta)$  admet une solution  $\Phi_\beta$ . Alors  $(\mathcal{P}_\beta)$  admet une unique solution  $f_\beta$ . De plus,  $f_\beta$  dépend continûment de  $g \in G$ .*
- II. Supposons en outre que  $\hat{\phi}_\beta(\xi) \neq 1$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , et qu'il existe deux réels positifs  $K$  et  $s$  tels que  $|1 - \hat{\phi}_\beta(\xi)| \sim_{\xi \rightarrow 0} K \|\xi\|^s$ . Alors, si pour chaque  $\beta \in ]0, 1]$ , le problème  $(\mathcal{Q}_\beta)$  admet une solution  $\Phi_\beta$ , et si  $g \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$  vérifie  $\mathcal{A}^\dagger g \in H^s(V)$ , alors l'unique solution  $f_\beta$  du problème  $(\mathcal{P}_\beta)$  converge fortement vers  $\mathcal{A}^\dagger g$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .*

Cet article a été publié dans le *Pacific Journal of Optimization* en janvier 2009 [12].

# A VARIATIONAL APPROACH TO THE INVERSION OF SOME COMPACT OPERATORS

XAVIER BONNEFOND AND PIERRE MARÉCHAL

**Abstract:** Inverse problems of Fourier synthesis can be regularized by constraining the resolution of the reconstructed object. One may speak of *regularization by mollification*. This regularization principle has been shown to behave nicely in practice, and more recently to give rise to interesting Tikhonov-like theorems. In this paper, we propose and analyse an extension of the regularization by mollification to a wider class of ill-posed problems.

**Key words:** *variational methods, ill-posed problems, regularization*

**Mathematics Subject Classification:** *35A15, 47A52*

## 1 Introduction

Let us consider an ill-posed operator equation of the form  $Tf = g$ , in which  $T$  is some linear mapping from a normed space  $F$  into a normed space  $G$  and  $g$  is the data, which is assumed to be an approximation of the image by  $T$  of the original unknown object  $f_0$ . In order to deal with ill-posedness of such problems, it is customary to infer regularized solutions via an optimization problem of the form

$$(\mathcal{E}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \mathcal{F}(f) := \frac{1}{2} \|g - Tf\|_G^2 + \alpha \mathcal{H}(f) \\ \text{s.t.} & f \in F, \end{array} \right.$$

in which  $\alpha$  is a positive parameter and  $\mathcal{H}$  is a convex functional generically called an *regularizer*.

The abundant literature devoted to the choice of a particular regularizer and, for this regularizer, of a particular value of  $\alpha$ , is symptomatic of a fundamental difficulty in the interpretation of the above scheme. Focusing primarily on the variational definition of the regularized solution leaves the new objective unclear: to some extent, the new unknown (which is no longer  $f_0$ ) remains unspecified.

In [7], Lannes *et al.* proposed an alternative scheme for problems of *Fourier synthesis*. They addressed problems in which

$$F = L^2(V), \quad G = L^2(W) \quad \text{and} \quad T = 1_W U.$$

Here,  $V$  and  $W$  are bounded subsets of  $\mathbb{R}^d$ ,  $L^2(V)$  denotes the subspace of  $L^2(\mathbb{R}^d)$  of the functions having their support in  $V$ ,  $1_W$  denotes both the indicator function of  $W$  and the operator ( $g \mapsto 1_W g$ ), and  $U$  denotes the Fourier operator:

$$(1_W g)(\xi) = 1_W(\xi)g(\xi) \quad \text{and} \quad Uf(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-2i\pi\langle \xi, x \rangle} f(x) dx.$$

The operator  $T$  is called a *truncated Fourier operator*. For convenience, the Fourier transform of a function  $\phi$  will also be denoted by  $\hat{\phi}$ . The regularization scheme of Lannes *et al.* can be outlined as follows:

- Step 1 Define the *object to be reconstructed* (or *target object*) as  $\phi_\beta * f_0$ , where  $\{\phi_\beta\}_{\beta>0}$  is an *approximation of unity*.
- Step 2 Replace the original data  $g$  (the approximate truncated Fourier transform of  $f_0$ ) by *regularized data*:  $\hat{\phi}_\beta g$ . The reason for this is that, if  $g$  is an approximation of the Fourier transform of  $f_0$ ,  $\hat{\phi}_\beta g$  will be an approximation of the Fourier transform of  $\phi_\beta * f_0$ .
- Step 3 Finally, define the *reconstructed object* as the solution of the following optimization problem:

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimize} \quad \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|_{L^2(W)}^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \text{s.t.} \quad f \in L^2(V_1), \end{array} \right.$$

in which  $V_1$  is a compact set containing  $V$ . Ideally,  $V_1$  should be chosen so as to contain the support of  $\phi_\beta * f_0$  for every  $\beta$  in the interval of interest (*e.g.*  $\beta \in (0, 1]$ ). In practice, if  $\phi_\beta$  has unbounded support, it is sufficient to ensure that most of the *energy* of  $\phi_\beta * f_0$  is contained in  $V_1$  for  $\beta$  in the range under consideration.

In a recent paper, Alibaud *et al.* [1] proved a theorem on the behavior of the regularized solution as  $\beta$  tends to zero (see Theorem 2.1 below). This theorem is the counterpart, for the regularization principle under consideration, of Tikhonov's convergence theorem, in which the *homogeneous* parameter  $\alpha$  is in force.

The present paper is an attempt to extend this result to a wider context. It is motivated by the desire to address ill-posed operator equations of the general form  $Tf = g$  in which  $T$  has no explicit connexion with any truncated Fourier operator. In such an extended context, what should indeed become Step 2 ? We shall see that it makes sense to replace the data  $g$  by *regularized data*  $\Phi_\beta g$ , in which the linear operator  $\Phi_\beta$  itself results from the minimization of some functional.

The paper is organized as follows. In Section 2, we give an overview of Fourier synthesis and we give a detailed account of our extended regularization scheme. Then, in section 3, we address the definition and computation of  $\Phi_\beta$  and we give examples. Finally, in section 4 we show that the convergence result of Alibaud *et al.* [1] can be extended to our generalized setting.

## 2 A General Regularization Scheme

### 2.1 Overview of Fourier Synthesis

We call *Fourier synthesis* the generic problem of recovering a function  $f_0$  from a partial and approximate knowledge of its Fourier transform. Whenever *partial* is understood as *limited to a bounded domain*, we speak of *Fourier extrapolation*.

Important milestones in the history of Fourier Synthesis are Landau's paper [5] on Fourier sampling theory and the eigenvalue analysis of truncated Fourier operators, and later on the paper by Lannes *et al.* [7], devoted to the regularization of the *Fourier extrapolation problem*. In the latter paper, the authors considered the following abstract problem:

Let  $V$  and  $W$  be bounded subsets of  $\mathbb{R}^d$ , where  $W$  is assumed to have non-empty interior. Recover  $f_0 \in L^2(V)$  from the knowledge of its Fourier transform on  $W$ .

Recall that  $T_W$  is injective, since Fourier transforms of compactly supported functions are analytic and  $W$  is assumed to have nonempty interior. Recall also that  $T_W$  is compact, as a Hilbert-Schmidt operator.

Ill-posedness of the Fourier extrapolation problem [7, 1] led Lannes *et al.* [7] to propose a regularization principle which, in essence, consists in constraining the resolution of the object to be inferred. The problem of identifying  $f_0$  is replaced by that of recovering a *limited resolution* version of it, namely,  $\phi_\beta * f_0$ , in which

$$\phi_\beta(x) := \frac{1}{\beta^d} \phi\left(\frac{x}{\beta}\right), \quad \text{with } \phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx = 1. \quad (2.1)$$

We shall refer to  $\phi_\beta \in L^1(\mathbb{R}^d)$  as an *apodized point spread function*, and to the parametrized family  $\{\phi_\beta\}_{\beta>0}$  as an *approximation of unity*. It is then reasonable to define the reconstructed object as the solution to Problem  $(\mathcal{P})$ .

The above regularization scheme clearly refers to mollification theory, and we may then speak of *regularization by mollification*. The parameter  $\beta$ , which can be regarded as the inverse of a *cutoff frequency*, appears as a *regularization parameter* for the inversion of  $T_W$ . In [1], Alibaud *et al.* considered the behavior of the solution to Problem  $(\mathcal{P})$  as this parameter tends to zero. They proved the following result:

**Theorem 2.1.** *Consider Problem  $(\mathcal{P})$  above, in which  $\phi_\beta$  is as in Equation (2.1). Let  $T_W^+$  denote the Moore-Penrose pseudo-inverse of  $T_W: L^2(V_1) \rightarrow L^2(W)$ .*

- I. *Let  $\alpha > 0$  and  $\beta > 0$  be fixed. Then  $(\mathcal{P})$  has a unique solution  $f_\beta$ . Moreover,  $f_\beta$  depends continuously on  $g \in L^2(W)$ .*
- II. *Assume that  $\hat{\phi}(\xi) \neq 1$  for all  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , and that there exist positive numbers  $K$  and  $s$  such that  $|1 - \hat{\phi}(\xi)| \sim_{\xi \rightarrow 0} K \|\xi\|^s$ . If  $g \in \text{ran } T_W$  is such that its analytic extension  $\tilde{g} = UT_W^+ g$  satisfies*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|\xi\|^{2s} |\tilde{g}(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

*then  $f_\beta$  converges to  $T_W^+ g$  strongly, in  $L^2(V_1)$ , as  $\beta \downarrow 0$ .*

Notice that  $T_W^+$  is nothing but  $T_W^{-1}$ , the inverse of  $T_W: L^2(V_1) \rightarrow \text{ran } T_W$ . Furthermore, in the second part of the theorem, the condition on  $g$  can be rewritten as

$$g \in T_W(L^2(V_1) \cap H^s(\mathbb{R}^d)),$$

in which  $H^s(\mathbb{R}^d)$  denotes as usual the Sobolev space

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \int (1 + \|\xi\|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\},$$

endowed with the inner product

$$\langle f_1, f_2 \rangle_s := \int (1 + \|\xi\|^2)^s \hat{f}_1(\xi) \overline{\hat{f}_2(\xi)} d\xi \quad (2.2)$$

and the corresponding norm

$$\|f\|_s^2 := \int (1 + \|\xi\|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

## 2.2 Extension

One of the key points in the above regularization scheme is that the *data* corresponding to the target object is easily computed from the original data: if  $g$  is an approximation of  $Uf_0$  on  $W$ ,  $\hat{\phi}_\beta g$  is an approximation of  $U(\phi_\beta * f_0)$ . This corresponds to the existence of an operator  $\Phi_\beta$  such that  $\Phi_\beta U = UC_\beta$ , where  $C_\beta$  denotes the convolution operator ( $f \mapsto \phi_\beta * f$ ) on  $L^2(\mathbb{R}^d)$  (and is understood as the identity for  $\beta = 0$ ). This nice aspect of (truncated) Fourier operators is shared with a few other operators, such as convolution operators or the classical Radon operators. The latter are important in practice [10, 8]. Nevertheless, there are relevant applications in which it is not possible to find such a  $\Phi_\beta$ . This motivates the generalization outlined in the introduction, which we now describe in detail.

Throughout, we shall assume the following:

STANDING ASSUMPTIONS:  $V$  is a bounded domain in  $\mathbb{R}^d$  containing the support of the original unknown object  $f_0$ ;  $G$  is an infinite dimensional separable Hilbert space;  $T: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow G$  is a continuous injective linear operator (modelling the data acquisition process) whose restriction to  $L^2(V)$  is compact.

The restriction of an operator  $T$  to a subspace  $E$  will be subsequently denoted by  $T|_E$ , or merely by  $T$  whenever no confusion is to be feared.

Let  $\phi_\beta * f_0$  be the new *target object*, where  $\{\phi_\beta\}_{\beta>0}$  is an approximation of unity. The target object may have an unbounded support in  $\mathbb{R}^d$ . Nevertheless we choose here to reconstruct the object in  $L^2(V_1)$  for some compact set  $V_1 \supset V$ : on the one hand, working with unbounded supports makes little sense in practice; on the other hand, it is reasonable to choose  $V_1$  in such a way that it contains most of the target object's *energy*. For example, one may fix a small parameter  $\varepsilon > 0$ , define  $\text{supp}_\varepsilon \phi$  as a ball  $B$  such that  $\int_{B^c} |\phi| \leq \varepsilon$ , and then choose  $V_1$  to be the closure of  $V + \text{supp}_\varepsilon \phi$ .

Finally, define the reconstructed object as the solution to

$$(\mathcal{P}_\beta) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimize} \quad \frac{1}{2} \|\Phi_\beta g - Tf\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \|(I - C_\beta)f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \text{s.t.} \quad f \in L^2(V_1), \end{array} \right.$$

in which  $I$  is the identity and  $\Phi_\beta: G \rightarrow G$  is a solution to the following optimization problem:

$$(\mathcal{Q}_\beta) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimize} \quad \frac{1}{2} \|TC_\beta - XT|_E\|_{L(E,G)}^2 \\ \text{s.t.} \quad X \in L(G), \quad X = 0 \text{ on } (\text{ran } T|_E)^\perp. \end{array} \right.$$

Here,  $E$  is some subspace of  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $L(E, G)$  denotes as usual the space of continuous linear mappings from  $E$  to  $G$  and  $L(G) := L(G, G)$ . We emphasize that the Hilbert space structure of  $E$  may not be the one inherited from that of  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

**Remark 2.2.** The assumption made on  $T$  in the above extension is not minimal: the reader may check that continuity of  $T$  on well chosen subspaces of  $L^2(\mathbb{R}^d)$  is sufficient. Our stronger assumption is made for the sake of clarity.

The following sections will demonstrate the relevance of our extended regularization principle.

### 3 Regularizing the Data

In this section, we give a few basic results concerning Problem  $(\mathcal{Q}_\beta)$ . Let  $E$  be a subspace of  $L^2(V_1)$ , a particular instance of which being considered in Section 4.

Throughout this section, the restriction  $T|_E$  of  $T$  to  $E$  will be denoted by  $T$ . In particular,  $T^+$  will denote the pseudo-inverse of  $T$  with respect to the Hilbert space structure of  $E$ , and for every continuous linear mapping  $Y$  from  $E$  to  $G$ ,  $\|Y\|$  will stand for  $\|Y\|_{L(E,G)}$ .

The functional to be minimized in  $(\mathcal{Q}_\beta)$  is obviously convex, as the post-composition of an affine function by a norm. It should be noticed that, in most cases of interest,  $(\mathcal{Q}_\beta)$  is an ill-posed optimization problem, for the function to be minimized then fails to be inf-compact.

As a matter of fact, consider the (translated) functional  $X \mapsto \|XT\|$ , in which  $T$  is compact and, in accordance with the rest of the paper,  $X$  belongs to a set of bounded operators vanishing on  $(\text{ran } T)^\perp$ . Let us show that, in the case where  $\text{ran } T$  is not of finite dimension, the level sets of the latter function are unbounded. Let  $K$  denote the closure of the image by  $T$  of the closed unit ball of  $F$ . The set  $K$  is a compact subset of  $G$ . Let  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  be a Hilbert basis of  $G$  and let  $v_k$  denote the element of maximum norm in  $K \cap \text{vect}\{g_k\}$ , whose existence is ensured by the compactness of  $K$ . Then,  $v_{k_r} \neq 0$  for an infinity of  $k_r \in \mathbb{N}$  and necessarily  $\|v_{k_r}\| \rightarrow 0$  as  $r \rightarrow \infty$ , for otherwise there would exist  $\lambda > 0$  such that  $\lambda g_{k_r} \in K$  for all  $r \in \mathbb{N}$ , and since  $\|\lambda g_p - \lambda g_q\| = \sqrt{2}\lambda$  for all  $p, q \in \mathbb{N}$ , the sequence  $(\lambda g_{k_r})_{r \in \mathbb{N}}$  cannot have any accumulation point, in contradiction with the compactness of  $K$ . Therefore,  $\|v_{k_r}\| \rightarrow 0$  as  $r \rightarrow \infty$  and we can define a sequence  $(X_r)_{r \in \mathbb{N}} \subset L(G)$  in such a way that:

$$X_r v_{k_r} = 1 \quad \text{and} \quad X_r|_{\{g_{k_r}\}^\perp} = 0,$$

so that  $\|X_r T\| = 1$  for all  $r \in \mathbb{N}$  and

$$\|X_r\| = \frac{1}{\|v_{k_r}\|} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty.$$

Moreover, in the case where  $T$  is not injective, uniqueness of a solution also fails.

However, Problem  $(\mathcal{Q}_\beta)$  turns out to have explicit solutions, under reasonable assumptions. This is the purpose of Proposition 3.1 below. Moreover, in practice, the computation of a solution may be performed by means of a proximal iterative procedure. The latter is known to introduce numerical well-posedness in ill-posed optimization problems.

**Proposition 3.1.** *If  $TC_\beta T^+$  belongs to  $L(\mathcal{D}(T^+), G)$ , then  $TC_\beta T^+$  can be extended to a continuous operator on  $G$  which is the unique solution to Problem  $(\mathcal{Q}_\beta)$ .*

*Proof.* Recall that  $\mathcal{D}(T^+) = \text{ran } T + (\text{ran } T)^\perp$  is a dense subset of  $G$ , and that, since  $T$  is assumed to be injective,  $T^+ T$  is the identity. Since  $TC_\beta T^+$  is assumed to be bounded, it admits a unique continuous linear extension to  $G$ ; this extension is denoted likewise and still satisfies :

$$\|TC_\beta T^+ T - TC_\beta\| = 0.$$

This proves that  $TC_\beta T^+$  is a solution to  $(\mathcal{Q}_\beta)$ . Moreover, if  $\Phi$  is another minimizer,  $\Phi T = TC_\beta$ , which yields  $\Phi T T^+ = TC_\beta T^+$ ; since  $T T^+ : \mathcal{D}(T^+) \rightarrow G$  is the orthogonal projection onto the closure of  $\text{ran } T$ , the latter equality implies that  $\Phi$  and  $TC_\beta T^+$  coincide on  $\text{ran } T$ . Since  $\Phi((\text{ran } T)^\perp)$  is constrained to be  $\{0\}$ , we finally obtain that  $\Phi = TC_\beta T^+$ .  $\square$

**Remark 3.2.** In this paper, we are mostly interested in the case where  $E$  is a dense subspace of  $L^2(V_1)$ . In this case,  $T(E)$  is dense in  $T(L^2(V_1))$  so that the domain  $\mathcal{D}(T|_E^+)$  is dense in

the domain  $\mathcal{D}(T_{[L^2(V_1)]}^+)$ . Moreover, since  $T$  is injective, the pseudoinverses  $T_{[E]}^+$  and  $T_{[L^2(V_1)]}^+$  coincide on  $\mathcal{D}(T_{[E]}^+) = T(E) + T(E)^\perp$ . Problem  $(\mathcal{Q}_\beta)$  is then equivalent to

$$(\mathcal{Q}'_\beta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimize} \quad \frac{1}{2} \|TC_\beta - XT_{[L^2(V_1)]}\|_{L(L^2(V_1), G)}^2 \\ \text{s.t.} \quad X \in L(G), \quad X = 0 \text{ on } (\text{ran } T_{[L^2(V_1)]})^\perp. \end{array} \right.$$

The reason for this is that, in the use of Proposition 3.1,  $TCT_{[E]}^+$  is bounded if and only if  $TCT_{[L^2(V_1)]}^+$  is bounded.

**Remark 3.3.** Note that, due to the injectivity of  $T$ , the minimum value of Problem  $(\mathcal{Q}_\beta)$  is equal to zero. If  $T$  were not injective, one could still prove that  $TC_\beta T^+$  is a solution to  $(\mathcal{Q}_\beta)$ , but uniqueness would clearly fail.

Notice that, since  $T^+$  is defined on  $\text{ran } T \oplus \ker T^* \subset G$ , the boundedness of  $TC_\beta T^+$  is equivalent to the existence of a positive constant  $K_\beta$  such that

$$\forall g \in \mathcal{D}(T^+), \quad \|TC_\beta T^+ g\| \leq K_\beta \|g\|.$$

Since every  $g$  in  $\mathcal{D}(T^+)$  can be written as  $g = g_1 + g_2$  with  $g_1 \in \text{ran } T$  and  $g_2 \in (\text{ran } T)^\perp$ , the above condition is equivalent to

$$\forall (g_1, g_2) \in \text{ran } T \times (\text{ran } T)^\perp \quad \|TC_\beta T^+ g_1\| \leq K_\beta \sqrt{\|g_1\|^2 + \|g_2\|^2}.$$

Since the latter inequality is true in particular when  $g_2 = 0$  and since  $TT^+$  coincides with the identity on  $\text{ran } T$ , an equivalent condition is

$$\forall g_1 \in \text{ran } T, \quad \|TC_\beta T^+ g_1\| \leq K_\beta \|TT^+ g_1\|.$$

Finally,  $T^+(\text{ran } T) = E$ , so that the boundedness of  $TC_\beta T^+$  is equivalent to the existence of a positive constant  $K_\beta$  such that

$$\forall f \in E, \quad \|TC_\beta f\| \leq K_\beta \|Tf\|.$$

We now describe a class of operators  $T$  such that  $TCT^+$  is bounded, where  $C$  is some convolution operator (that is,  $Cf = \phi * f$  for some convolution kernel  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ). We assume here that  $E = L^2(V_1)$ , endowed with the standard inner product.

Recall that the integral operator of kernel  $\alpha: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  is defined by

$$Tf(x) = \int \alpha(x, y) f(y) dy,$$

the domain of  $T$  being the space of measurable functions for which the above integral is well-defined for almost all  $x \in \mathbb{R}^d$ .

**Proposition 3.4.** *Let  $T$  be the integral operator of kernel  $\alpha$ . Assume that*

- (i)  $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |\alpha(x, y)|^2 dx dy < \infty$  (that is,  $T$  is Hilbert-Schmidt on  $L^2(\mathbb{R}^d)$ );
- (ii) there exists a function  $k$  such that for all  $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ ,  $\alpha(x, y + z) = \alpha(x, y)k(x, z)$ ;
- (iii) there exists a positive constant  $M_\phi$ , depending on  $\phi$  only, such that

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(z) k(x, z) dz \right| < M_\phi.$$

Then  $T$  is well-defined on  $\text{ran } C|_{L^2(V_1)}$  and  $TCT^+$  is bounded on its domain.

*Proof.* Let  $f$  be any function in  $L^2(V_1)$ . Then,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha(x, y) Cf(y)| \, dy &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \alpha(x, y) \int_{\mathbb{R}^d} \phi(z) f(y - z) \, dz \right| \, dy \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |\alpha(x, y) \phi(z) f(y - z)| \, dz \, dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |\alpha(x, y' + z) \phi(z) f(y')| \, dz \, dy' \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |\alpha(x, y') k(x, z) \phi(z) f(y')| \, dz \, dy' \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha(x, y') f(y')| \left( \int_{\mathbb{R}^d} |k(x, z) \phi(z)| \, dz \right) \, dy' \\
 &\leq M_\phi \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha(x, y') f(y')| \, dy'.
 \end{aligned}$$

This proves that  $T$  is well-defined on  $\text{ran } C$ . Now, it is easy to check that

$$TCf(x) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \phi(z) k(x, z) \alpha(x, y') f(y') \, dy' \, dz.$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
 \|TCf\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(z) k(x, z) \, dz \right|^2 |Tf(x)|^2 \, dx, \\
 &\leq M_\phi^2 \int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^2 \, dx, \\
 &\leq M_\phi^2 \|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,
 \end{aligned}$$

whence the desired conclusion.  $\square$

#### **4 Regularizing the Pseudo-inverse**

In this section, we set:

$$E := L^2(V_1) \cap H^s(\mathbb{R}^d),$$

and we endow  $E$  with the inner product of  $H^s(\mathbb{R}^d)$  (defined in Equation (2.2)). We consider the instances of  $(\mathcal{P}_\beta)$  and  $(\mathcal{Q}_\beta)$  corresponding to the above choice of  $E$ , and we study the asymptotic behavior of  $(\mathcal{P}_\beta)$  as  $\beta \downarrow 0$ .

Clearly,  $E$  is dense in  $L^2(V_1)$ . As expressed in Remark 3.2, the solution  $\Phi_\beta$  obtained with this choice is the same as the solution to  $(\mathcal{Q}'_\beta)$ .

Throughout this section,  $T^+$  denotes the pseudo-inverse of  $T$  regarded as an operator from  $L^2(V_1)$  into  $G$ . Notice that, since  $T: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow G$  is assumed to be injective,  $T^+$  is nothing but the inverse of

$$T: L^2(V_1) \rightarrow T(L^2(V_1)).$$

Notice also that, whenever  $g \in T(L^2(V))$ ,  $T^+g$  is also the inverse image of  $g$  by  $T: L^2(V) \rightarrow T(L^2(V))$ .



We emphasize that the operator norm to be minimized in  $(\mathcal{Q}_\beta)$  is  $\|\cdot\|_{L(E,G)}$ . This choice, which comes from the particular class of functions  $\phi$  considered here, is justified by the proofs of the technical lemmas we are about to state.

We shall prove that, in some sense,  $C_\beta$  converges to the identity and  $\Phi_\beta$  converges to the projection onto the closure of  $\text{ran } T|_E$  as  $\beta \downarrow 0$ . Notice that this projection is a solution to the following limit problem:

$$(\mathcal{Q}_0) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimize} \quad \frac{1}{2} \|T|_E - XT|_E\|_{L(E,G)}^2 \\ \text{s.t.} \quad X \in L(G), \quad X = 0 \text{ on } (\text{ran } T|_E)^\perp. \end{array} \right.$$

As for Problem  $(\mathcal{P}_\beta)$ , the corresponding limit problem reads:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Minimize} \quad \frac{1}{2} \|TT^+g - Tf\|_G^2 \\ \text{s.t.} \quad f \in L^2(V_1). \end{array} \right.$$

Since  $T^+TT^+ = T^+$ , the latter problem is equivalent to the classical least squares problem:

$$(\mathcal{P}_0) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimize} \quad \frac{1}{2} \|g - Tf\|_G^2 \\ \text{s.t.} \quad f \in L^2(V_1), \end{array} \right.$$

whose solution is nothing but  $T^+g$  whenever  $g \in \mathcal{D}(T^+)$ .

The following theorem is an extension of Theorem 2.1. Since many technicalities of the proof given in [1] remain valid in our extended setting, we shall often refer to the latter reference.

**Theorem 4.1.** *Consider Problem  $(\mathcal{P}_\beta)$  above, in which  $\phi_\beta$  is as in Equation (2.1).*

- I. *Let  $\alpha > 0$  and  $\beta \in (0, 1]$  be fixed. Assume that Problem  $(\mathcal{Q}_\beta)$  has a solution  $\Phi_\beta$ . Then  $(\mathcal{P}_\beta)$  has a unique solution  $f_\beta$ . Moreover,  $f_\beta$  depends continuously on  $g \in G$ .*
- II. *Assume that  $\hat{\phi}(\xi) \neq 1$  for all  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , and that there exist positive numbers  $K$  and  $s$  such that  $|1 - \hat{\phi}(\xi)| \sim_{\xi \rightarrow 0} K \|\xi\|^s$ . Assume in addition that, for every  $\beta \in (0, 1]$ , Problem  $(\mathcal{Q}_\beta)$  has a solution  $\Phi_\beta$ . Let  $g \in \mathcal{D}(T^+)$  be such that  $T^+g$  belongs to  $E$ . Then, the unique solution  $f_\beta$  of Problem  $(\mathcal{P}_\beta)$  converges strongly to  $T^+g$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .*

We shall need the following lemma, whose proof can be found in [1].

**Lemma 4.2.** *Let  $\phi$  be as in Theorem 4.1, and let*

$$m_\beta := \min_{\|\xi\|=1} |1 - \hat{\phi}(\beta\xi)|^2 \quad \text{and} \quad M_\beta := \max_{\|\xi\|=1} |1 - \hat{\phi}(\beta\xi)|^2$$

*Then, the following hold:*

- (i) *For all  $\beta > 0$ , one has  $0 < m_\beta \leq M_\beta \leq (1 + \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)})^2$ ;*
- (ii)  *$\sup_{\beta > 0} (M_\beta/m_\beta) < \infty$  and  $M_\beta \rightarrow 0$  as  $\beta \downarrow 0$ ;*
- (iii) *there exist two positive constants  $\nu_0$  et  $A_0$  such that, for all  $\beta \in (0, 1]$  and all  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,*

$$\nu_0 \left( \|\xi\|^{2s} 1_{B_{1/\beta}}(\xi) + \frac{1}{M_\beta} 1_{B_{1/\beta}^c}(\xi) \right) \leq \frac{|1 - \hat{\phi}(\beta\xi)|^2}{|1 - \hat{\phi}(\beta\xi/\|\xi\|)|^2} \leq A_0 \|\xi\|^{2s}.$$

The last estimate is the corner stone of the proof of Theorem 4.1. In particular, it will provide us with a bound on the norm of  $I - C_\beta$ .

**Proposition 4.3.** *In the context of Theorem 4.1 and Lemma 4.2, the following holds:*

$$\forall \beta \in (0, 1], \quad \|I - C_\beta\|_{L(E, L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \leq M_\beta A_0,$$

where  $I$  stands for the canonical continuous injection of  $E$  into  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

*Proof.* By definition,

$$\begin{aligned} & \|I - C_\beta\|_{L(E, L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\ &= \sup_{\substack{h \in E \\ \|h\|_s=1}} \|h - \phi_\beta * h\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= \sup_{\substack{h \in E \\ \|h\|_s=1}} \|(1 - \hat{\phi}_\beta)\hat{h}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= \sup_{\substack{h \in E \\ \|h\|_s=1}} \int_{\mathbb{R}^d} |1 - \hat{\phi}(\beta\xi/\|\xi\|)|^2 \frac{|1 - \hat{\phi}(\beta\xi)|^2}{|1 - \hat{\phi}(\beta\xi/\|\xi\|)|^2} |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sup_{\substack{h \in E \\ \|h\|_s=1}} M_\beta A_0 \int_{\mathbb{R}^d} \|\xi\|^{2s} |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq M_\beta A_0 \sup_{\substack{h \in E \\ \|h\|_s=1}} \|h\|_s^2 \\ &= M_\beta A_0, \end{aligned}$$

where the first inequality stems from Lemma 4.2.  $\square$

The following application of the above lemma is in accordance with the intuition about the behavior of  $\Phi_\beta$  as  $\beta \downarrow 0$ .

**Proposition 4.4.** *In the context of Theorem 4.1 and Lemma 4.2,*

$$\|\Phi_\beta T - T\|_{L(E, G)} \rightarrow 0 \quad \text{as } \beta \downarrow 0.$$

*Proof.* We shall use the continuity of  $T$  on  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Since  $\Phi_\beta$  is a solution to  $(\mathcal{Q}_\beta)$ , one has:

$$\begin{aligned} \|\Phi_\beta T - T\|_{L(E, G)} &\leq \|\Phi_\beta T - TC_\beta\|_{L(E, G)} + \|T - TC_\beta\|_{L(E, G)} \\ &\leq 2\|T - TC_\beta\|_{L(E, G)} \\ &\leq 2\|T\|_{L(L^2(\mathbb{R}^d), G)} \|I - C_\beta\|_{L(E, L^2(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned}$$

The conclusion then follows from Lemma 4.2.  $\square$

Since  $\Phi_\beta$  is designed so as to vanish on  $(\text{ran } T|_E)^\perp$ , we see that,  $\Phi_\beta$  converges in the weak sense to the orthogonal projection onto the closure of  $\text{ran } T|_E$ .

We are ready to prove our main theorem.

*Proof of the Theorem.* Following [1], we divide the proof into three steps. In Step 1, the  $L^2$ -norm of  $f_\beta$  is bounded above by a quantity which does not depend on  $\beta$ . The weak

convergence of  $f_\beta$  to  $T^+g$  is then established in Step 2. Finally, in Step 3, some of the estimates of Step 1 allow us to call on a classical compactness theorem to show that the convergence is in fact strong.

**Step 1:  $L^2$ -estimate.** Since  $f_\beta$  is the solution to  $(\mathcal{P}_\beta)$ , the following inequality is satisfied by all  $f \in L^2(V_1)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Phi_\beta g - T f_\beta\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \|(1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f}_\beta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \|\Phi_\beta g - T f\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \|(1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

The choice  $f = T^+g$  yields

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Phi_\beta g - T f_\beta\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \|(1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f}_\beta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \|\Phi_\beta g - T T^+g\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \|(I - C_\beta) T^+g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Recall that  $\Phi_\beta$  vanishes on  $T(E)^\perp = T(L^2(V_1))^\perp$ , so that  $\Phi_\beta g = \Phi_\beta T T^+g$ . The above inequality then implies that

$$\frac{\alpha}{2} \|(1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f}_\beta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{1}{2} \|(\Phi_\beta T - T) T^+g\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \|(I - C_\beta) T^+g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

On the one hand,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|(\Phi_\beta T - T) T^+g\|_G^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|T^+g\|_s^2 \|\Phi_\beta T - T\|_{L(E,G)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|T^+g\|_s^2 \left( \|\Phi_\beta T - T C_\beta\|_{L(E,G)} + \|T - T C_\beta\|_{L(E,G)} \right)^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|T^+g\|_s^2 \left( \|T - T C_\beta\|_{L(E,G)} + \|T - T C_\beta\|_{L(E,G)} \right)^2 \\ & \leq 2 \|T^+g\|_s^2 \|T\|_{L(L^2(\mathbb{R}^d),G)}^2 \|I - C_\beta\|_{L(E,L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\ & \leq 2 \|T^+g\|_s^2 \|T\|_{L(L^2(\mathbb{R}^d),G)}^2 A_0 M_\beta, \end{aligned}$$

in which the last inequality results from Proposition 4.3. On the other hand,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \|(I - C_\beta) T^+g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 & \leq \frac{\alpha}{2} \|T^+g\|_s^2 \|(I - C_\beta)\|_{L(E,L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\ & \leq \frac{\alpha}{2} \|T^+g\|_s^2 A_0 M_\beta, \end{aligned}$$

by Proposition 4.3 again. Consequently,

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} \|(1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f}_\beta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq \left( 2 \|T^+g\|_s^2 \|T\|_{L(L^2(\mathbb{R}^d),G)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|T^+g\|_s^2 \right) A_0 M_\beta. \end{aligned}$$

Furthermore, it can be shown (see [1]) that  $\|(1 - \hat{\phi}_\beta)\hat{f}_\beta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$  is bounded below by

$$m_\beta \left( \nu_0 \int_{\|\xi\| \leq 1/\beta} \|\xi\|^{2s} \left| \hat{f}_\beta(\xi) \right|^2 d\xi + \frac{\nu_0}{M_\beta} \int_{\|\xi\| > 1/\beta} \left| \hat{f}_\beta(\xi) \right|^2 d\xi \right)$$

Finally, putting things together, we obtain the following estimate: for all  $\beta \in (0, 1]$ ,

$$\nu_0 \int_{\|\xi\| \leq 1/\beta} \|\xi\|^{2s} \left| \hat{f}_\beta(\xi) \right|^2 d\xi + \frac{\nu_0}{M_\beta} \int_{\|\xi\| > 1/\beta} \left| \hat{f}_\beta(\xi) \right|^2 d\xi \leq A,$$

where

$$A := A_0 \left( \sup_{\beta > 0} \frac{M_\beta}{m_\beta} \right) \left( \frac{4}{\alpha} \|T^+g\|_s^2 \|T\|_{L(L^2(\mathbb{R}^d), G)}^2 + \|T^+g\|_s^2 \right).$$

Notice that Lemma 4.2 (ii) implies that  $A$  is a finite (positive) real number. We proceed again as in [1] to deduce that

$$\forall \beta \in (0, 1], \quad \|f_\beta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|F_{B_1^c}^{-1}\|^2 (1 + \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)})^2 \frac{A}{\nu_0},$$

where

$$\begin{aligned} F_{B_1^c} : \quad L^2(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow L^2(B_1^c) \\ f &\longmapsto 1_{B_1^c} \hat{f}. \end{aligned}$$

has a bounded inverse.

**Step 2: weak convergence.** Let  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  be any positive sequence converging to zero. If we can prove that the sequence  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  defined by

$$f_n := f_{\beta_n}$$

has a subsequence which converges weakly to  $T^+g$ , then the weak convergence of  $f_\beta$  to  $T^+g$  will be established, because the sequence  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  is arbitrary.

From Step 1, we know that such a sequence  $(f_n)$  is bounded, and thus from the Weak Compactness Theorem that it has an accumulation point in  $L^2(V_1)$ , which we call  $f'$ . It is now sufficient to prove that  $f' = T^+g$ . Recall that  $T^+g$  is the unique solution to

$$(\mathcal{P}_0) \quad \left| \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \frac{1}{2} \|g - Tf\|_G^2 \\ \text{s.t.} \quad f \in L^2(V_1). \end{array} \right.$$

Let  $\Phi_{n_k} := \Phi_{\beta_{n_k}}$ . Since  $f_{n_k}$  is the solution to  $(\mathcal{P}_{\beta_{n_k}})$ , for every  $f \in L^2(V_1)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Phi_{n_k}g - Tf_{n_k}\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \|(1 - \hat{\phi}_{n_k})\hat{f}_{n_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \|\Phi_{n_k}g - Tf\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \|(1 - \hat{\phi}_{n_k})\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

We have:

$$\|\Phi_{n_k}g - Tf_{n_k}\|_G^2 \leq \|\Phi_{n_k}g - Tf\|_G^2 + \alpha \|(I - C_{\beta_{n_k}})f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (4.1)$$

Since  $g \in \mathcal{D}(T^+)$ , it can be written as  $g = g_1 + g_2$  with  $g_1 \in \text{ran } T$  and  $g_2 \in (\text{ran } T)^\perp$ , and we have  $\Phi_{n_k}g = \Phi_{n_k}g_1$ . Moreover recall that  $T^+g = T^+g_1$ , so that we can assume that

$g \in \text{ran } T$ . Let  $k$  tend to  $\infty$  in this inequality. Proposition 4.4 implies that  $\Phi_{n_k} g \rightarrow g$ . Moreover, it is clear that  $Tf_{n_k}$  converges weakly to  $Tf'$ . It follows that  $\Phi_{n_k} g - Tf_{n_k}$  converges weakly to  $g - Tf'$ , so that

$$\|g - Tf'\|_G^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\Phi_{n_k} g - Tf_{n_k}\|_G^2.$$

On the other hand,  $\Phi_{n_k} g - Tf$  converges strongly to  $g - Tf$  and by Proposition 4.3 again  $\|(1 - \hat{\phi}_{n_k})\hat{f}\|_{L^2} = \|(I - C_{\beta_{n_k}})f\|_{L^2}$  tends to 0. We deduce that the right hand side of (4.1) converges to  $\|g - Tf\|_G^2$ , so that

$$\|g - Tf'\|_G^2 \leq \|g - Tf\|_G^2.$$

Since this holds for every  $f \in L^2(V_1)$ , we see that  $f'$  must be the unique solution to  $(\mathcal{P}_0)$ .

**Step 3: strong convergence.** Since  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset L^2(V_1)$  is bounded and so is  $V_1$ , it is clear that

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\|x\| > R} |f_n(x)|^2 dx = 0.$$

Furthermore, it was proved in [1] that, under the estimates of Step 1,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|\mathcal{T}_h f_n - f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \|h\| \rightarrow 0, \quad (4.2)$$

where for every  $h \in \mathbb{R}^d$  and every  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathcal{T}_h f$  denote the translated function  $x \mapsto f(x - h)$ .

Finally, it results from [4, Theorem 3.8 page 175], that the sequence  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  defined in Step 2 is relatively compact, and thus that the convergence of  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  to  $T^+g$  obtained in Step 2 is in fact strong.  $\square$

**Remark 4.5.** In order to remain coherent with our regularization principle, the data  $g$  should be taken in the smaller subspace

$$T(L^2(V) \cap H^s(\mathbb{R}^d)) + T(L^2(V_1))^\perp.$$

In this case,  $f_\beta$  converges to an element of  $L^2(V)$ . The only reason for replacing  $V$  by  $V_1$  was to avoid possible boundary effects in the solution to  $(\mathcal{P}_\beta)$ . The whole construction, including Theorem 4.1, is valid with any compact set  $V' \supset V$ .

## 5 Conclusion

The regularization by mollification was originally designed for problems of Fourier synthesis. In this paper, we have extended this regularization principle to a wider class of ill-posed operator equations. Our main result is the extension of a convergence result obtained by Alibaud *et al.* [1], which demonstrates the asymptotic coherence of this regularization scheme.

Our extension relies on the definition of an operator  $\Phi_\beta$  (depending on the new regularization parameter  $\beta$ ) which can be regarded as a surrogate of the data regularization  $g \mapsto \hat{\phi}_\beta g$  appearing naturally in Fourier synthesis. As pointed out in Section 3,  $\Phi_\beta$  is defined through an ill-posed problem, and numerical difficulties can be expected in the computation of  $\Phi_\beta$ . However, we believe that these difficulties are not insurmountable, for the following reasons.

Observe first that, in order to compute (the finite dimensional approximation of)  $\Phi_\beta g = TC_\beta T^+g$ , it may be easier to first compute  $T^+g$ , via an ill-posed least squares problem, and then apply  $TC_\beta$ . This may be the only possible approach whenever the dimension of the problem does not allow for the computation and storage of  $TC_\beta T^+$ . Again, ill-posedness of the computation of  $T^+g$  must be addressed.

In fact, the ill-posedness we are facing encompasses two aspects: first, the difficulty to reach an accurate numerical estimation of  $T^+g$ ; second, the sensitivity of  $T^+g$  to perturbations  $\delta g$  of the data  $g$  (which involves the norm of  $T^+$ ). Concerning the numerical accuracy, let us merely mention that high accuracy may be reached with bad (but not dramatic) condition: for example, a proximal strategy (which is a particular case of *iterative refinement*) may be considered. Concerning the sensitivity to perturbations, one should keep in mind that the norm of  $T^+$  is not really what matters, since the *regularized data* is rather  $TC_\beta T^+g$ . Recall that the operators of interest here are such that  $TC_\beta T^+$  is continuous (see Proposition 3.1). One can reasonably expect that, in the finite dimensional version of our extended regularization principle, the continuity of  $TC_\beta T^+$  will result in a reasonable norm of the corresponding matrix.

The analysis presented in this paper provides the basis for the implementation of a reconstruction algorithm for a wide class of inverse problems. The actual design of an algorithm is currently under study, and it is deferred to future publication.

## Acknowledgement

The authors wish to thank the anonymous referee, whose valuable observations originated significant clarification of the paper.

## References

- [1] N. Alibaud, P. Maréchal and Y. Saesor, A variational approach to the inversion of truncated Fourier operators, to appear in *Inverse Problems*. See also the preprint <http://www.mip.ups-tlse.fr/publis/files/07.22.pdf>.
- [2] J. M. Borwein, P. Maréchal and D. Naugler, Convex dual approach to the computation of NMR complex spectra, *Mathematical Methods of Operations Research*, 51 (2000) 91–102.
- [3] R. Boubertakh, J.-F. Giovannelli, A. De Cesare and A. Herment, Non-quadratic convex regularized reconstruction of MR images from spiral acquisitions, *Signal Processing* 86 (2006) 2479–2494.
- [4] F. Hirsch and G. Lacombe, *Elements of Functional Analysis*, Springer-Verlag (Graduate Texts in Mathematics; 192), 1999.
- [5] H. J. Landau, Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions, *Acta Mathematica* 117 (1967) 37–52.
- [6] A. Lannes, E. Anterrieu and K. Bouyoucef, Fourier interpolation and reconstruction via Shannon-type techniques; Part 1: regularization principle, *J. Mod. Opt.* 41 (1994) 1537–1574.

- [7] A. Lannes, S. Roques and M.-J. Casanove, Stabilized reconstruction in signal and image processing; Part I: partial deconvolution an spectral extrapolation with limited field, *J. Mod. Opt.* 34 (1987) 161–226.
- [8] P. Maréchal, D. Togane and A. Celler, A new reconstruction methodology for computerized tomography: FRECT (Fourier Regularized Computed Tomography), *IEEE, Trans. Nucl. Sc.* 47 (2000) 1595–1601.
- [9] P. Maréchal and D. Wallach, Fourier synthesis via partially finite convex programming, to appear in *Mathematical and Computer Modelling*.
- [10] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, SIAM (Classics in Applied Mathematics), Philadelphia, 2001.

---

*Manuscript received*  
*revised*  
*accepted for publication*

Xavier Bonnefond

E-mail address:

Pierre Maréchal

E-mail address: `pr.marechal@gmail.com`





## Annexe D

# Pseudo-commutant explicite

L'efficacité de la démarche présentée ci-dessus dépend en grande partie de la possibilité d'exhiber explicitement, ou bien de calculer à moindre coût, un pseudo-commutant  $\Phi_\beta$  pour l'opérateur  $\mathcal{A}$ . Évidemment, une telle possibilité est à examiner au cas par cas, et je ne saurais décrire ici de solution générale à ce problème. Dans un cadre pratique, lorsque les opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $C_\beta$  ont été discrétisés, fournissant respectivement  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (nous ne nous occupons pas ici de la dépendance en  $\beta$ , que nous omettons donc dans les notations), le pseudo-commutant peut-être défini comme une matrice  $\Phi$  dans  $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  et solution de :

$$(\mathcal{Q}) \left| \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & F(XA - AC), \\ \text{s.c.} & X \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), X = 0 \text{ sur } (A(\mathbb{R}^n))^\perp, \end{array} \right.$$

où  $F$  est une fonctionnelle convexe à déterminer. Cependant le problème  $(\mathcal{Q})$  est un problème d'optimisation convexe de très grande taille, dont la résolution numérique n'est que difficilement envisageable pour les dimensions d'usage. C'est pourquoi, afin de faire un pas vers une expression analytique de  $\Phi$ , nous allons établir que dans cette situation le choix canonique pour le pseudo-commutant lorsque  $\mathcal{F}$  est la norme d'opérateur classique, c'est-à-dire  $ACA^\dagger$ , reste en fait valable pour une large classe de fonctionnelles  $F$ .

Nous dotons l'espace des matrices réelles  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  du produit scalaire usuel :

$$\langle A, B \rangle := \text{Tr}(B^T A), \quad A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

## D.1 Les applications $\mathcal{O}_m \times \mathcal{O}_n$ -invariantes

**Définition D.1.1.** Toute application  $F: \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  vérifiant :

$$\forall M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \forall (U, V) \in \mathcal{O}_m \times \mathcal{O}_n, \quad F(UMV) = F(M),$$

est dite  $\mathcal{O}_m \times \mathcal{O}_n$ -invariante.

Ces applications sont fortement reliées aux fonctions absolument symétriques, que nous définissons également. On appellera *matrice de permutation signée* toute matrice ayant exactement un élément non nul sur chaque ligne et colonne valant 1 ou -1, dont l'ensemble sera noté  $\Pi(m)$ . On notera le sous-groupe formé des matrices de permutations  $S(n)$ .

**Définition D.1.2.** Une fonction  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  sera dite  $\Pi(m)$ -invariante ou *absolument symétrique* si

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \forall Q \in \Pi(m), \quad f(Q\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

Afin d'alléger les notations par la suite, définissons également l'application  $\text{diag}_{m \times n}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  qui à un vecteur  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_m)$  associe la matrice rectangulaire :

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \dots & x_m & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dès lors la décomposition en valeurs singulières d'une matrice  $M$  peut s'écrire :

$$M = U\Sigma V, \quad U \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R}), V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \Sigma = \text{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_m),$$

où  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$  sont les valeurs singulières de  $M$  (voir l'annexe A). Ces dernières nous permettent de définir une application :

$$\begin{aligned} \sigma: \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ M &\longmapsto \sigma(M) := (\sigma_1(M), \dots, \sigma_m(M)). \end{aligned}$$

Grâce à l'existence de la décomposition en valeurs singulières pour toute matrice rectangulaire  $M$ , il est aisé de voir qu'une application  $F$  est  $\mathcal{O}_m \times \mathcal{O}_n$ -invariante si et seulement si elle vérifie :

$$F = F \circ \text{diag}_{m \times n} \circ \sigma,$$

et que dans une telle situation l'application  $f := F \circ \text{diag}_{m \times n}$  est l'unique fonction absolument symétrique satisfaisant  $F = f \circ \sigma$ . Pour cette raison les applications  $\mathcal{O}_m \times \mathcal{O}_n$ -invariantes sont parfois appelées *fonctions spectrales*, et de nombreuses propriétés de telles fonctions  $F$  peuvent se déduire des propriétés de la fonction  $f := F \circ \text{diag}_{m \times n}$ . Par exemple il est bien connu [54, 19] que la convexité de  $F$  est équivalente à celle de  $f$ . Un autre résultat important concerne la caractérisation du sous-différentiel de  $F$  en fonction de celui de  $f$ , que l'on peut résumer comme suit [54].

**Théorème D.1.1.** *Soit  $F: \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow ]-\infty, \infty]$  une fonction spectrale convexe, et  $f := F \circ \text{diag}_{m \times n}$ . Alors, pour chaque  $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  telle que  $\sigma(M) \in \text{dom } f$ ,*

$$\partial F(M) = \{ U \text{diag}_{m \times n}(\xi) V \mid \xi \in \partial f(\sigma(M)), U \in \mathcal{O}_m, V \in \mathcal{O}_n \}.$$

**Lemme D.1.2.** *Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux espaces euclidiens, et  $f: E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  une application convexe. Si  $\xi_2 \in \partial f(x_1, \cdot)(x_2)$ , alors il existe  $\xi_1 \in E_1$  tel que  $(\xi_1, \xi_2) \in \partial f(x_1, x_2)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\xi_2 \in \partial f(x_1, \cdot)(x_2)$ . Un tel vecteur existe, puisque  $f(x_1, \cdot)$  est convexe et finie. par définition :

$$\forall y_2 \in E_2, \quad f(x_1, y_2) \geq f(x_1, x_2) + \langle \xi_2, y_2 - x_2 \rangle. \quad (\text{D.1})$$

Nous avons à montrer qu'il existe  $\xi_1 \in E_1$  tel que  $(\xi_1, \xi_2) \in \partial f(x_1, x_2)$ . Puisque  $f(\cdot, y_2)$  est également convexe et finie partout, le sous-différentiel de  $f(\cdot, y_2)$  en  $x_1$  est non vide. En choisissant un  $\xi_1$  dans  $\partial f(\cdot, y_2)(x_1)$ , nous avons :

$$\forall y_1 \in E_1, \quad f(y_1, y_2) \geq f(x_1, y_2) + \langle \xi_1, y_1 - x_1 \rangle. \quad (\text{D.2})$$

En combinant (D.1) et (D.2), on obtient :

$$\forall (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2, \quad f(y_1, y_2) \geq f(x_1, x_2) + \langle \xi_1, y_1 - x_1 \rangle + \langle \xi_2, y_2 - x_2 \rangle,$$

ce qui assure que  $(\xi_1, \xi_2) \in \partial f(x_1, x_2)$ .  $\square$

**Lemme D.1.3.** *Soit  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  une application absolument symétrique. Alors, pour tout vecteur de la forme  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ , le sous-différentiel de  $f$  en  $\mathbf{x}$  contient un élément  $\xi$  de la forme  $(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0)$ .*

*Démonstration.* Clairement,  $\partial f(\mathbf{x})$  n'est pas vide : il existe  $\xi \in \mathbb{R}^m$  tel que :

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \quad f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k \xi_j (y_j - x_j) + \sum_{j=k+1}^m \xi_j y_j.$$

En particulier, en choisissant  $y_j = x_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , on a, pour toute collection de réels  $y_{k+1}, \dots, y_m$  :

$$f(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_m) \geq f(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) + \sum_{j=k+1}^m \xi_j y_j.$$

En changeant le signe des  $y_{k+1}, \dots, y_m$  et en usant de l'invariance de  $f$ , nous obtenons que, pour tout  $y_{k+1}, \dots, y_m \in \mathbb{R}$  :

$$f(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_m) \geq f(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

En d'autres termes,  $\mathbf{0} \in \partial f(x_1, \dots, x_k, \cdot, \dots, \cdot)(\mathbf{0})$ . Grâce au lemme D.1.2, il existe un élément  $(\xi_1, \dots, \xi_k)$  de  $\mathbb{R}^k$  tel que :

$$(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0) \in \partial f(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

□

Ces quelques résultats techniques vont nous permettre de caractériser le pseudo-commutant  $\Phi$ .

## D.2 Caractérisation du pseudo-commutant

**Proposition D.2.1.** *Soit  $F: \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction spectrale convexe, et  $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ . Alors, il existe  $N \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  telle que  $NM \in \partial F(M)$ .*

*Démonstration.* Définissons  $k$  comme le plus grand entier naturel pour lequel  $\sigma_k(M) \neq 0$ . D'après le lemme D.1.3,  $\partial f(\boldsymbol{\sigma}(M))$  contient un élément de la forme  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ . Soit  $U \in \mathcal{O}_m$ ,  $V \in \mathcal{O}_n$  telles que  $M = U \operatorname{diag}_{m \times n}(\boldsymbol{\sigma}(M))V$ , et définissons :

$$B := \operatorname{diag} \left( \frac{\xi_1}{\sigma_1(M)}, \dots, \frac{\xi_k}{\sigma_k(M)}, 0, \dots, 0 \right) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}).$$

Finalement, soit  $N := UBU^T$ . On a :

$$NM = UB \operatorname{diag}_{m \times n}(\boldsymbol{\sigma}(M))V = U \operatorname{diag}_{m \times n}(\boldsymbol{\xi})V.$$

Le théorème D.1.1 assure alors que  $NM \in \partial F(M)$ . □

**Théorème D.2.2.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $\tilde{F}: \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\tilde{F}(\Phi) := F(\Phi T - TC)$ , avec  $F$  une application  $\mathcal{O}_m \times \mathcal{O}_n$ -invariante convexe. Soit finalement  $Z$  le sous-espace de  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  des matrices s'annulant sur  $\ker A^T$  :

$$Z := \left\{ M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \mid \forall \mathbf{x} \in \ker A^T, M\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}.$$

Alors  $ACA^\dagger$  est solution de :

$$(\mathcal{Q}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser } \tilde{F}(\Phi) \\ \text{s.c. } \Phi \in Z. \end{array} \right.$$

*Démonstration.* On a :

$$\partial \tilde{F}(ACA^\dagger) = \partial F(ACA^\dagger A - AC) \cdot A^T.$$

Or  $\partial F(ACA^\dagger A - AC)$  contient une matrice de la forme  $N(ACA^\dagger A - AC)$  avec  $N \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ , d'après la proposition D.2.1. Ainsi,  $\partial \tilde{F}(ACA^\dagger)$  contient la matrice nulle. En effet :

$$N(ACA^\dagger A - AC)A^T = N(ACA^\dagger AA^T - ACA^T) = 0,$$

puisque  $A^\dagger A$  est la projection orthogonale sur l'image de  $A^T$ .  $\square$

Nous venons donc de généraliser la caractérisation du pseudo-commutant  $\Phi$  à une large famille de fonctionnelles  $F$ . Notons que le choix de la norme d'opérateur  $F = ||| \cdot |||$ , définie sur  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  par :

$$|||M||| := \sup \{ \|M\mathbf{x}\|_2 \mid \|\mathbf{x}\|_2 = 1 \},$$

satisfait aux hypothèses du théorème D.2.2. En effet, la convexité est immédiate et  $|||M||| = \sigma_1(M)$  pour tout  $M$  dans  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ , ce qui assure que  $F = ||| \cdot |||$  est spectrale. Notons que dans ce cas  $f = F \circ \text{diag}_{m,n}$  est donnée sur  $\mathbb{R}^m$  par :

$$f(\mathbf{x}) = \max \{ |x_k| \mid k \in \{1, \dots, m\} \}.$$

Pour finir, remarquons que lorsque  $A$  est injective, la solution de  $(\mathcal{Q})$  donne lieu à une *commutation exacte*, puisque dans cette situation  $A^\dagger A$  vaut l'identité, et donc  $ACA^\dagger A = AC$ .



## Chapitre 5

# Estimation du paramètre de régularisation

Dans ce chapitre, nous traitons de la résolution d'un problème inverse linéaire mal posé du type :

$$\mathcal{A}f = g, \quad (5.1)$$

où  $\mathcal{A}$  est un opérateur linéaire compact agissant sur un espace de Hilbert  $F$ , et à valeurs dans un autre espace de Hilbert  $G$ . Ici  $f$  désigne donc l'inconnue du problème et les données  $g$  considérées sont de la forme :

$$g := g_0 + g_{\text{bruit}},$$

où  $g_0 = \mathcal{A}f_0$  pour un certain  $f_0 \in F$ , et où  $g_{\text{bruit}}$  est la composante de bruit. Comme nous l'avons déjà mentionné ici (dans la section 1.2.5 et le chapitre 4 par exemple), la mal-position du problème (5.1) est souvent issue de propriétés régularisantes de l'opérateur  $\mathcal{A}$ , et l'on peut aborder avec succès son inversion à l'aide de la minimisation d'une fonctionnelle, définie comme la somme d'un *terme d'attache aux données* et d'un *terme de régularisation*. Plus précisément, il s'agit de définir une famille de fonctionnelles dépendant d'un (ou de plusieurs) *paramètre de régularisation*  $\alpha$ , construites de telle manière que pour chaque valeur  $\alpha > 0$  le problème de minimisation soit bien posé, et que sa solution  $f_\alpha$  converge vers une solution au sens des moindres carrés de (5.1) lorsque  $\alpha \downarrow 0$ .

Bien que le comportement asymptotique de la solution régularisée lorsque  $\alpha$  décroît soit important pour la validité de la méthode, en pratique le pa-

paramètre  $\alpha$  est toujours fixé à une valeur strictement positive. Dans les applications, le choix du paramètre de régularisation constitue une étape primordiale dans la reconstruction d'une approximation de l'objet  $f_0$ . En effet, l'utilisation d'un  $\alpha$  trop grand ne fournira qu'une ébauche peu satisfaisante de l'objet, tandis qu'un paramètre trop proche de zéro sera la cause d'une grande sensibilité de la solution aux perturbations présentes dans les données (conduisant ainsi à des problèmes de conditionnement numérique).

Pour la grande majorité des problèmes posés en pratique, il est vain de chercher un paramètre  $\alpha$  satisfaisant pour tous les jeux de données  $g$  car un tel choix, prenant de fait en compte les pires perturbations possibles, conduit fatalement à une régularisation excessive du problème (5.1). C'est pourquoi il semble plus raisonnable, et c'est le choix que nous avons fait dans ce qui suit, de développer des stratégies de sélection de paramètre dépendant des données effectivement disponibles. Pour cela nous nous appuyons sur les travaux de Hnetynkova *et al* dans [42], qui permettent l'estimation du niveau de bruit  $\delta_{\text{bruit}}$  lors de la mise en œuvre numérique de la bidia-gonalisation de Golub-Kahan. Trois hypothèses doivent être satisfaites afin que cette estimation soit pertinente. Tout d'abord le bruit  $g_{\text{bruit}}$  doit être un bruit blanc, c'est-à-dire que toutes ses composantes fréquentielles sont d'amplitudes comparables. Ensuite le bruit doit rester négligeable devant les données complètes :

$$\|g_{\text{bruit}}\| \ll \|g\|.$$

Et finalement il faut supposer que l'opérateur  $\mathcal{A}$  à inverser est régularisant et que sa version discrétisée satisfait la condition de Picard discrète (voir la section 1.2.3 pour la définition). Dans la suite nous supposons donc que ces conditions sont satisfaites et que nous disposons d'une estimation de

$$\delta_{\text{bruit}} := \frac{\|g_{\text{bruit}}\|}{\|g\|}.$$

Le travail présenté ci-dessous concerne le choix de paramètre de régularisation pour les régularisations de Tikhonov et par mollification (voir le chapitre 4). Il a été réalisé conjointement avec Pierre Maréchal et Zdenek Strakos (Université de Prague) et il est en cours de soumission au moment de la rédaction de ce mémoire.



## 5.1 Choix du paramètre de régularisation de Tikhonov

Nous munissons les espaces  $F$  et  $G$  des produits scalaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ , ainsi que des normes associées  $\|\cdot\|_F$  et  $\|\cdot\|_G$ . Nous omettrons les indices à chaque fois que le contexte ne permettra aucune ambiguïté.

Rappelons que la régularisation de Tikhonov consiste à approcher la solution de (5.1) par la solution  $f_\alpha$  du problème suivant :

$$(\mathcal{P}_\alpha) \left| \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \|\mathcal{A}f - g\|_G^2 + \alpha \|f\|_F^2 \\ \text{s.c.} & f \in F. \end{array} \right.$$

De nombreuses stratégies ont été proposées pour choisir un  $\alpha > 0$  optimal. Ce sont pour la plupart des méthodes d'estimation *a posteriori*, c'est-à-dire qu'elles nécessitent plusieurs résolutions du problème  $(\mathcal{P}_\alpha)$  pour être menées à bien. Parmi celles qui utilisent une estimation de  $\tau := \|g_{\text{bruit}}\|$ , citons le *principe de Morozov*, consistant à rechercher un résidu  $\|\mathcal{A}f_\alpha - g\|$  égal à  $\tau$  (voir par exemple [66, 9, 33, 21, 8]), ou sa variante la *méthode de Gferrer/Raus* [30]. Les méthodes dites *L-curve* et *validation croisée généralisée*, quant à elles, n'utilisent aucune estimation de  $\tau$  (voir [39, 40, 31]) mais souffrent d'une complexité difficilement contournable pour des problèmes de grande taille [32]. Notons finalement que des stratégies *a priori* existent, comme dans [64] et [65] où l'on cherche à contrôler le nombre de conditionnement de la matrice à inverser ; néanmoins, une telle approche ne permet pas d'utiliser les propriétés des données  $g$  effectivement disponibles.

La méthode que je me propose de décrire ici prend le même point de départ que les méthodes de Morozov, à savoir que puisque l'on dispose d'une estimation  $\tau$  de  $\|g_{\text{bruit}}\|$  il est raisonnable d'attendre que le paramètre  $\alpha$  optimal conduise à :

$$\|\mathcal{A}f_\alpha - g\|^2 \simeq \tau^2.$$

En effet, chercher à obtenir un résidu plus petit entraînerait fatalement la pollution de la solution par la composante bruitée des données.

Par ailleurs, il est bien connu que  $f_\alpha$ , étant solution du problème  $(\mathcal{P}_\alpha)$ , minimise le problème contraint :

$$(\mathcal{Q}) \left| \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \|f\|^2 \\ \text{s.c.} & \|\mathcal{A}f - g\|^2 = \varepsilon \end{array} \right.$$

avec  $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) := \|\mathcal{A}f_\alpha - g\|^2$ . Il s'agit d'un cas particulier du lemme d'Everett (voir l'annexe A). Comme nous allons voir il est possible d'emprunter le chemin inverse : partant du problème  $(\mathcal{Q})$  avec  $\varepsilon = \tau^2$ , la dualité de Lagrange va nous fournir une valeur de  $\alpha$  telle que la solution de  $(\mathcal{P}_\alpha)$  soit également solution de  $(\mathcal{Q})$ .

Le problème  $(\mathcal{Q})$  n'est pas convexe, cependant si l'on a  $\varepsilon < \|g\|^2$ , hypothèse raisonnable si  $\varepsilon$  est une estimation du bruit, alors il est équivalent au problème :

$$(\mathcal{Q}^*) \left| \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \|f\|^2 \\ \text{s.c.} & \|\mathcal{A}f - g\|^2 \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

Par la suite nous désignerons par *problème contraint* un problème formulé comme  $(\mathcal{Q}^*)$  et par *problème pénalisé* un problème de la forme de  $(\mathcal{P}_\alpha)$ .

Soulignons dès à présent que même si la résolution directe de  $(\mathcal{Q}^*)$  est envisageable en principe, elle est à proscrire en pratique. En effet l'équivalence entre les formulations contrainte et pénalisée ne s'étend pas aux aspects de stabilité numérique. On voit directement qu'en fixant  $\varepsilon$  au carré de la distance entre  $g$  et l'image de  $\mathcal{A}$ , la solution de  $(\mathcal{Q}^*)$  n'est autre que la solution instable des moindres carrés liés au problème (5.1).

Le développement qui suit peut-être vu comme un cas particulier d'une théorie plus générale, dont on pourra trouver un exposé dans [41]. Nous utiliserons la décomposition en valeurs singulières (SVD) de l'opérateur  $\mathcal{A}$  (voir l'annexe A pour les détails), et nous noterons  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$  ses valeurs singulières et  $(f_i)$  (respectivement  $(g_i) := (\frac{1}{\sigma_i} \mathcal{A}f_i)$ ) la base hilbertienne de  $F$  (respectivement de  $G$ ) correspondante.

Fixons la tolérance sur  $\|\mathcal{A}f - g\|^2$  à la valeur de l'estimation disponible, soit  $\varepsilon = \tau^2$  dans  $(\mathcal{Q})$ , alors le lagrangien du problème  $(\mathcal{Q})$  est donné par :

$$L(f, \lambda) := \|f\|^2 + \lambda \left( \|\mathcal{A}f - g\|^2 - \tau^2 \right), \quad f \in F, \lambda \in \mathbb{R},$$

et le problème de Lagrange associé s'écrit :

$$(\mathcal{L}_\lambda) \left| \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & L(f, \lambda) \\ \text{s.c.} & f \in F. \end{array} \right.$$

Il est clair que le problème de Lagrange ainsi défini, pour  $\lambda > 0$ , est équivalent à  $(\mathcal{P}_\alpha)$  pour chaque  $\alpha = 1/\lambda$ . Il est différentiable et convexe, et sa condition d'optimalité du premier ordre s'écrit :

$$2f + 2\lambda(\mathcal{A}^* \mathcal{A}f - \mathcal{A}^* g) = 0.$$

Ainsi, dès que  $\lambda > -1/\sigma_1^2$ , où  $\sigma_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  valeur singulière de  $\mathcal{A}$ , le problème  $(\mathcal{L}_\lambda)$  admet une unique solution  $f_\lambda$ , avec :

$$f_\lambda := \lambda (I + \lambda \mathcal{A}^* \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^* g, \quad \lambda > -\frac{1}{\sigma_1^2}.$$

On définit la *fonction duale* comme la valeur optimale du lagrangien :

$$D(\lambda) = \inf \{ L(f, \lambda) \mid f \in F \}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

et le problème dual associé à  $(\mathcal{Q})$  s'écrit :

$$(\mathcal{D}) \left| \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & D(\lambda) \\ \text{s.c.} & \lambda \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Dès lors, le principal résultat de cette section peut être énoncé comme suit :

**Théorème 5.1.1.** *Il existe  $\bar{\lambda} > 0$  tel que le problème  $(\mathcal{L}_{\bar{\lambda}})$  admet une unique solution  $f_{\bar{\lambda}}$  satisfaisant  $\|\mathcal{A}f_{\bar{\lambda}} - g\|^2 = \tau^2$ , et qui est par conséquent solution de  $(\mathcal{Q})$  également, si et seulement si l'estimation de bruit  $\tau$  satisfait :*

$$\text{dist}(g, \overline{\mathcal{A}F}) < \tau < \|g\|. \quad (5.2)$$

Dans ce cas,  $\bar{\lambda}$  est l'unique solution du problème  $(\mathcal{D})$ .

Ainsi, sous des hypothèses raisonnables pour l'estimation  $\tau$ , il suffit de résoudre le problème  $(\mathcal{D})$ , de dimension 1 mais dont l'estimation de la fonction coût requiert la résolution de  $(\mathcal{L}_\lambda)$ , et de poser  $\alpha_{\text{opt}} = 1/\bar{\lambda}$ .

Afin de démontrer le théorème 5.1.1, étudions tout d'abord de plus près le comportement de la fonction duale  $D$ . En tant qu'infimum d'une famille de fonctions affines,  $D$  est concave et semi-continue supérieurement. De plus,  $D(0) = 0$  et, quand  $\lambda\sigma_1^2 < -1$ , il est aisé de voir que l'on a :

$$L(rf_1, \lambda) = r^2 \left[ 1 + \lambda\sigma_1^2 \left( \left\| g_1 - \frac{g}{r\sigma_1} \right\|^2 - \frac{\tau^2}{r^2\sigma_1^2} \right) \right] \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\infty,$$

de telle manière que :

$$\forall \lambda < -\frac{1}{\sigma_1^2}, \quad D(\lambda) = -\infty.$$

**Proposition 5.1.2.** *La fonction duale  $D$  est continûment dérivable et strictement concave sur  $] -1/\sigma_1^2, \infty[$ .*

*Démonstration.* Soit  $\lambda \in ] -1/\sigma_1^2, \infty[$ , alors, en utilisant la représentation de  $f_\lambda$  fournie par la condition d'optimalité, on obtient :

$$D(\lambda) = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{1 + \lambda \sigma_k^2} \langle \mathcal{A}^* g, f_k \rangle f_k \right\|^2 + \lambda \left( \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda \sigma_k}{1 + \lambda \sigma_k^2} \langle \mathcal{A}^* g, f_k \rangle g_k - P_{\overline{\mathcal{A}F}}(g) \right\|^2 + \left\| P_{\ker(\mathcal{A}^*)}(g) \right\|^2 - \tau^2 \right),$$

d'après le théorème de Pythagore, avec  $P_{\ker(\mathcal{A}^*)}$  et  $P_{\overline{\mathcal{A}F}}$  deux projections orthogonales. Ainsi :

$$D(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 \sigma_k^2}{(1 + \lambda \sigma_k^2)^2} |\langle g, g_k \rangle|^2 + \lambda \left( \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda \sigma_k^2}{1 + \lambda \sigma_k^2} - 1 \right) \langle g, g_k \rangle g_k \right\|^2 + \left\| P_{\ker(\mathcal{A}^*)}(g) \right\|^2 - \tau^2 \right).$$

On a finalement :

$$D(\lambda) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle g, g_k \rangle|^2}{1 + \lambda \sigma_k^2} + \lambda \left\| P_{\ker(\mathcal{A}^*)}(g) \right\|^2 - \lambda \tau^2.$$

Puisque les termes de cette série sont tous majorés par  $|\langle g, g_k \rangle|^2/\nu$ , où le réel  $\nu := \min\{1, 1 + \lambda \sigma_1^2\}$  est strictement positif,  $D$  est dérivable et :

$$D'(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle g, g_k \rangle|^2}{(1 + \lambda \sigma_k^2)^2} + \left\| P_{\ker(\mathcal{A}^*)}(g) \right\|^2 - \tau^2, \quad \lambda \in ] -1/\sigma_1^2, \infty[. \quad (5.3)$$

La série converge uniformément en  $\lambda$  et sa somme est clairement strictement décroissante en  $\lambda$ .  $\square$

Remarquons que l'équation (5.3) s'écrit également :

$$D'(\lambda) = \|\mathcal{A} f_\lambda - g\|^2 - \tau^2, \quad \lambda \in ] -1/\sigma_1^2, \infty[,$$

et donc :

$$\forall \lambda \in ] -1/\sigma_1^2, \infty[, \quad D'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \|\mathcal{A} f_\lambda - g\| = \tau.$$

Ceci conduit à :

**Proposition 5.1.3.** *La fonction duale atteint un maximum en un certain  $\lambda$  dans  $] -1/\sigma_1^2, \infty[$  si et seulement si le problème  $(\mathcal{L}_\lambda)$  admet une unique solution  $f_\lambda$  satisfaisant  $\|\mathcal{A}f_\lambda - g\|^2 = \tau^2$ . Dans un tel cas,  $f_\lambda$  est également solution du problème  $(\mathcal{Q})$ .*

Tout est à présent en place pour la démonstration du théorème 5.1.1 :

*Démonstration du théorème.* Tout d'abord, la condition  $\tau \geq \|g\|$  est équivalente, via l'équation (5.3), à l'inégalité  $D'(0) \leq 0$ , et la stricte concavité de  $D$  ne permet pas alors l'existence d'un maximiseur strictement positif.

De plus, si l'on a  $\text{dist}(g, \overline{\mathcal{A}F}) < \tau$ , alors il existe un  $\tilde{f} \in F$  tel que :

$$\tilde{\mu} := \|\mathcal{A}\tilde{f} - g\|^2 - \tau^2 < 0.$$

Par conséquent pour chaque  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$D(\lambda) \leq L(\tilde{f}, \lambda) = \|\tilde{f}\|^2 + \lambda\tilde{\mu} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} -\infty,$$

ce qui est équivalent à l'existence d'un maximiseur  $\bar{\lambda} \in [-1/\sigma_1^2, \infty[$  pour  $D$ .

Pour finir, si  $\text{dist}(g, \overline{\mathcal{A}F}) \geq \tau$ , alors pour tout  $f \in F$  et  $\lambda > 0$  :

$$L(f, \lambda) \geq \|f\|^2 + \lambda((\text{dist}(g, \overline{\mathcal{A}F}))^2 - \tau^2) \geq \lambda s,$$

avec  $s := (\text{dist}(g, \overline{\mathcal{A}F}))^2 - \tau^2 \geq 0$ . Ainsi :

$$\forall \lambda > 0, \quad D(\lambda) \geq \lambda s,$$

et la fonction duale  $D$  n'admet aucun maximiseur. La proposition 5.1.3 complète alors la démonstration.  $\square$

La figure 5.1 illustre les différentes situations induites par la valeur de  $\tau$ .

L'analyse présentée ici clarifie la relation entre les formulations contrainte et pénalisée. Notons qu'elle s'étend de manière directe à la régularisation de Tikhonv généralisée, où le terme de régularisation  $\|f\|^2$  est remplacé par le carré d'une semi-norme  $\langle f, \mathcal{T}f \rangle$ . Ici,  $\mathcal{T}$  désigne un opérateur auto-adjoint semi-défini positif sur  $F$ .

Clairement, si la condition (5.2) n'est pas satisfaite, la maximisation de  $D$  ne peut qu'échouer, et il est clair que la tolérance  $\tau$  ne peut être atteinte.

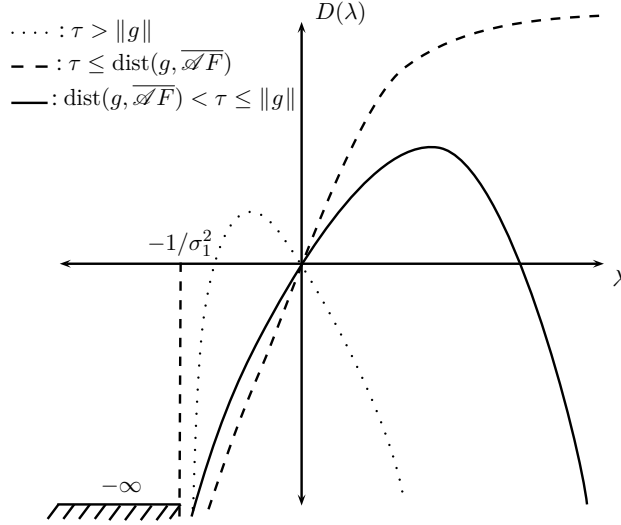


FIGURE 5.1 – Aspect de la fonction duale  $D$  selon la valeur de l'estimation  $\tau$

Ceci peut se produire si l'estimation du bruit n'est pas suffisamment précise, ou encore si le bruit domine les données.

D'un autre côté, si l'estimation  $\tau$  est raisonnable, la condition (5.2) sera certainement satisfaite, et un paramètre  $\alpha$  approprié peut être calculé en maximisant  $D(\lambda)$ . L'évaluation de la fonction  $D$  s'effectue par la résolution du problème, quadratique, de Lagrange. Un tel problème est stable pour de petites valeurs de  $\lambda$ , et son comportement se détériore quand  $\lambda$  augmente.

**Application à la transformée de Radon sphérique** Nous allons ici tester l'étude précédente dans le cas de l'inversion de la transformée de Radon sphérique  $R_s$ . Nous discrétisons le problème (5.1) afin que l'objet à reconstruire  $f_0$  soit une image de taille  $128 \times 128$  pixels. Les données sont générées de sorte que :

$$g = R_s f_0 + g_{\text{bruit}},$$

où  $g_{\text{bruit}}$  est un bruit gaussien blanc de 10%.

Puisque la résolution du problème de Lagrange, nécessaire à l'évaluation de  $D$ , fournit également la dérivée de la fonction duale, nous avons choisi de maximiser celle-ci avec une méthode de la sécante appliquée à sa dérivée. Cette méthode a nécessité six itérations pour obtenir la valeur 70.44 pour

le maximiseur  $\bar{\lambda}$ , avec une précision de 0.01 (ce qui induit une précision satisfaisante sur  $\bar{\alpha} := 1/\bar{\lambda}$ ). La figure 5.2 représente  $D$  autour de cette valeur.

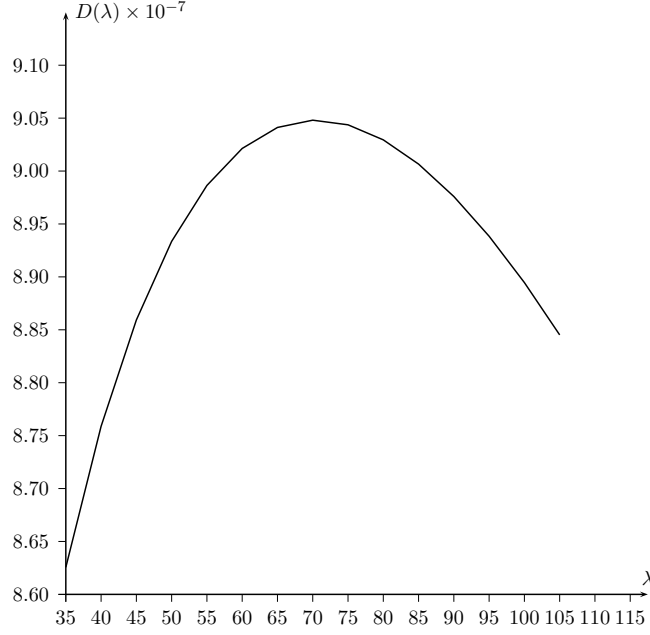


FIGURE 5.2 – La fonction duale  $D$  autour de son maximum.

En fixant  $\bar{\alpha} := 1/\bar{\lambda}$ , on peut résoudre le problème de Tikhonov  $(\mathcal{P}_{\bar{\alpha}})$ , dont la solution est notée  $f_{\bar{\alpha}}$ . Alors on vérifie que :

$$\frac{\|R_s f_{\bar{\alpha}} - g\|}{\|g\|} = 0.0996326 \approx \delta_{\text{bruit}}.$$

Ainsi la solution du problème pénalisé en la valeur optimale  $\bar{\alpha}$  vérifie bien la contrainte du problème  $(\mathcal{Q})$ . La figure 5.3 représente l'objet original  $f_0$  et la reconstruction  $f_{\bar{\alpha}}$ .

Finalement, la figure 5.4 représente l'écart relatif à  $f_0$  des solutions des différents problèmes de Lagrange  $\mathcal{L}_{\lambda}$  autour du maximiseur de  $D$ . On s'aperçoit ici que le choix de  $\bar{\lambda}$  conduit à une erreur relative proche du minimum.



FIGURE 5.3 – L'objet  $f_0$  et la reconstruction  $f_{\bar{\alpha}}$ .

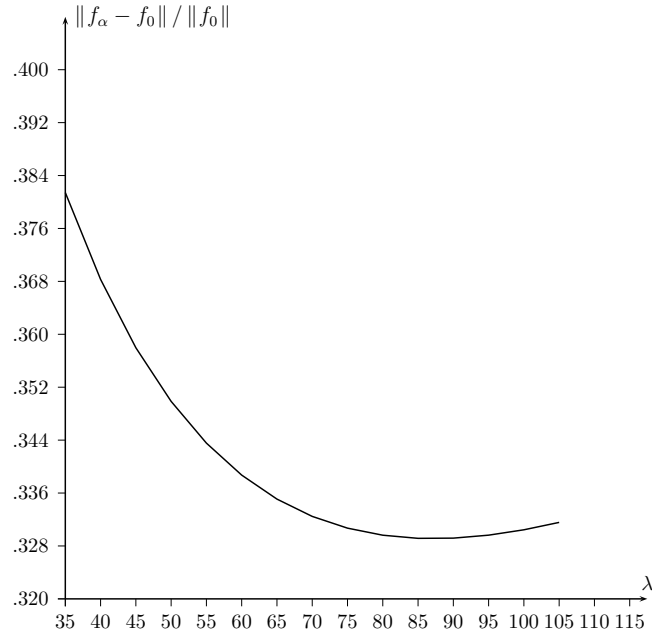


FIGURE 5.4 – Paramètre de Tikhonov : la valeur optimale  $\bar{\lambda} \approx 70$  conduit à une erreur relative quasiment minimale.

## 5.2 Choix du paramètre de mollification

La régularisation par mollification est présentée dans le chapitre 4. Rappelons simplement que dans un cadre  $L^2$  elle consiste à remplacer l'objet initial  $f$  par une version basse résolution de celui-ci  $\phi_{\beta} * f$ , où  $(\phi_{\beta})_{\beta>0}$  est une famille de noyaux régularisant tendant vers la distribution de Dirac. On note  $C_{\beta}$



l'opérateur de régularisation par  $\phi_\beta$ . Ici les fonctions  $\mathcal{F}\phi_\beta$  jouent le rôle de filtres passe-bas. cela conduit à définir la famille de problèmes :

$$(\mathcal{P}_\beta) \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \|\mathcal{A}f - \Phi_\beta g\|^2 + \|(1 - \mathcal{F}\phi_\beta)f\|^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{array} \right.$$

où  $\Phi_\beta$  est solution de

$$(\mathcal{Q}_\beta) \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \|X\mathcal{A} - \mathcal{A}C_\beta\|^2 \\ \text{s.c.} \quad X \in \mathcal{L}(G) \text{ et } X = 0 \text{ sur } (\mathcal{A}(L^2(\mathbb{R}^n)))^\perp. \end{array} \right.$$

Dans ce cadre, c'est le réel positif  $\beta$  qui devient le paramètre de régularisation pertinent, fixant la résolution souhaitée sur l'objet reconstruit.

Supposons que les données sont telles que le procédé décrit dans [42] fournit une estimation du niveau de bruit :

$$\delta_{\text{bruit}} := \frac{\|g_{\text{bruit}}\|}{\|g\|}.$$

Nous allons voir qu'alors il est possible de déterminer *a priori* un paramètre  $\beta$  adapté.

L'estimation que nous proposons repose sur le fait que les propriétés régularisantes des opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $C_\beta$ , couplées à la forme du problème  $(\mathcal{Q}_\beta)$ , suggèrent que le pseudo-commutant  $\Phi_\beta$  agit comme un filtre passe-bas, i.e. :

$$\Phi_\beta g = \Phi_\beta g_0 + \Phi_\beta g_{\text{bruit}} \approx \Phi_\beta g_0,$$

de telle sorte que

$$\Phi_\beta g \approx g_0.$$

Par conséquent le paramètre de mollification  $\beta$  devrait satisfaire :

$$\frac{\|g - \Phi_\beta g\|^2}{\|g\|^2} = \frac{\|g_{\text{bruit}}\|^2}{\|g\|^2} = \delta_{\text{bruit}}^2.$$

De l'hypothèse  $g_{\text{bruit}} \ll g$  et de l'égalité de Parseval on déduit la condition :

$$1 - \frac{\|\Phi_\beta g\|^2}{\|g\|^2} = \delta_{\text{bruit}}^2. \quad (5.4)$$

Notons qu'il est nécessaire pour appliquer ce critère de disposer d'une expression analytique de  $\Phi_\beta$ , faute de quoi l'estimation du paramètre  $\beta$ , qui requerrait la résolution répétée du problème  $(\mathcal{Q}_\beta)$ , ne pourrait être menée à bien en un temps raisonnable.

**Mise en œuvre pour la TTA** Le calcul mené dans la section B.2 fournit un pseudo-commutant  $\Phi_\beta$  explicite dans la situation où les fonctions  $\phi_\beta$  sont des noyaux gaussiens. Dans ce cas  $\Phi_\beta$  n'est autre que l'opérateur de convolution *en temps* par le noyau  $\phi_\beta$  en une dimension :

$$\Phi_\beta g = \left( \frac{1}{(\pi\beta)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\|t\|^2}{\beta}} \right) *_t g(x, t), \quad x \in \mathcal{S}, t \in \mathbb{R}.$$

Cette expression analytique conduit, via la FFT, à un traitement rapide des données, rendant de ce fait viable la critère (5.4) pour le choix de  $\beta$ . Les calculs ont été effectués après discrétisation en deux dimensions, en taille  $128 \times 128$  pixels, de l'objet  $f$  représenté dans la figure 5.6, ainsi que de tous les opérateurs. Les données ont été calculées de la manière suivante :

$$g := \mathcal{W}f + g_{\text{bruit}},$$

où  $\mathcal{W}$  est l'opérateur fournissant une solution de l'équation des ondes issue de  $f$  et restreinte à une surface  $\mathcal{S}$  (voir la section 3.2.1), et  $g_{\text{bruit}}$  est un *bruit gaussien blanc* satisfaisant :

$$\frac{\|g_{\text{bruit}}\|}{\|g\|} = \delta_{\text{bruit}} \approx 0.05.$$

La figure 5.5 illustre le choix de  $\beta$  induit par le critère (5.4).

Dans cette situation nous avons estimé  $\beta_{\text{opt}} \approx 1/305$ , et la figure 5.6 montre le résultat  $f_{\beta_{\text{opt}}}$  de la résolution numérique de  $(\mathcal{P}_{\beta_{\text{opt}}})$ .

L'estimation du résidu en  $f_{\beta_{\text{opt}}}$  donne :

$$\frac{\|\mathcal{W}f_{\beta_{\text{opt}}} - g\|}{\|g\|} = 0.043.$$

De plus, comme l'illustre la figure 5.7, ce choix pour  $\beta$  semble être optimal à plus d'un titre. En effet,  $\beta_{\text{opt}}$  est également une bonne approximation du paramètre de régularisation conduisant à une erreur relative par rapport à l'objet original minimale :

$$\frac{\|f_{\beta_{\text{opt}}} - f\|}{\|f\|} \approx \inf \{ \|f_\beta - f\| / \|f\| \mid \beta \in \mathbb{R}_+ \}.$$

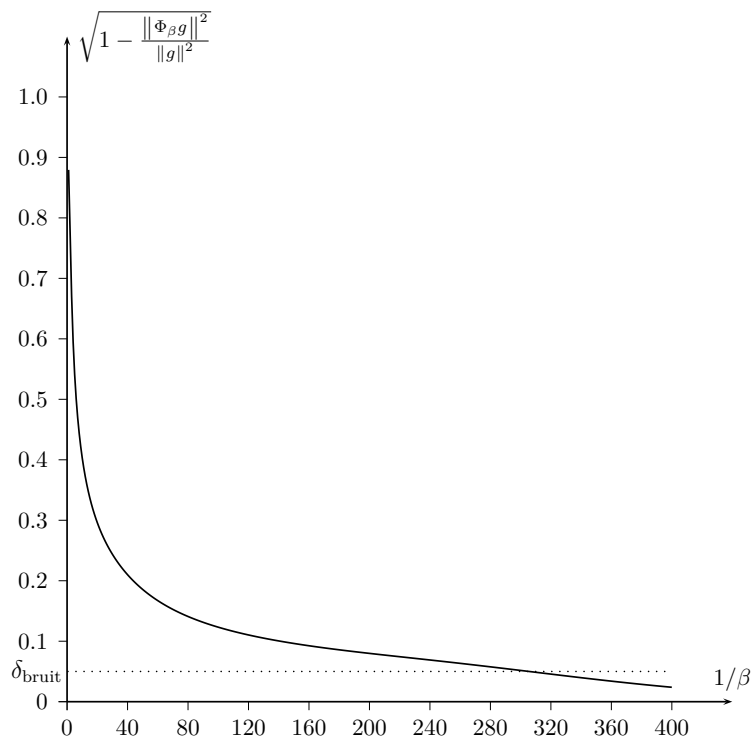


FIGURE 5.5 – Estimation du paramètre  $\beta$  selon le critère (5.4). La droite en pointillés indique le niveau de bruit.

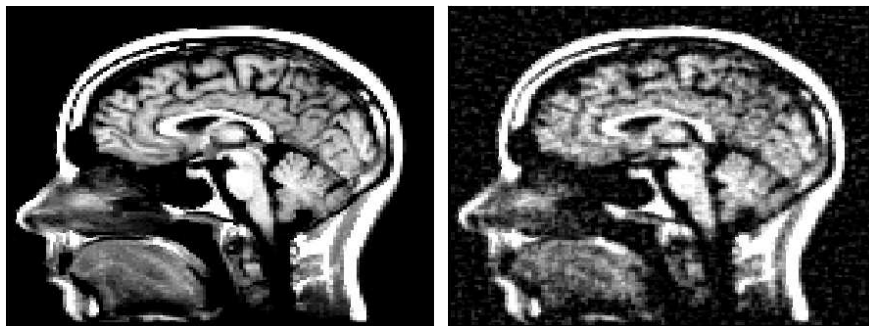


FIGURE 5.6 – L'objet  $f_0$  et la reconstruction  $f_{\beta_{\text{opt}}}$ .

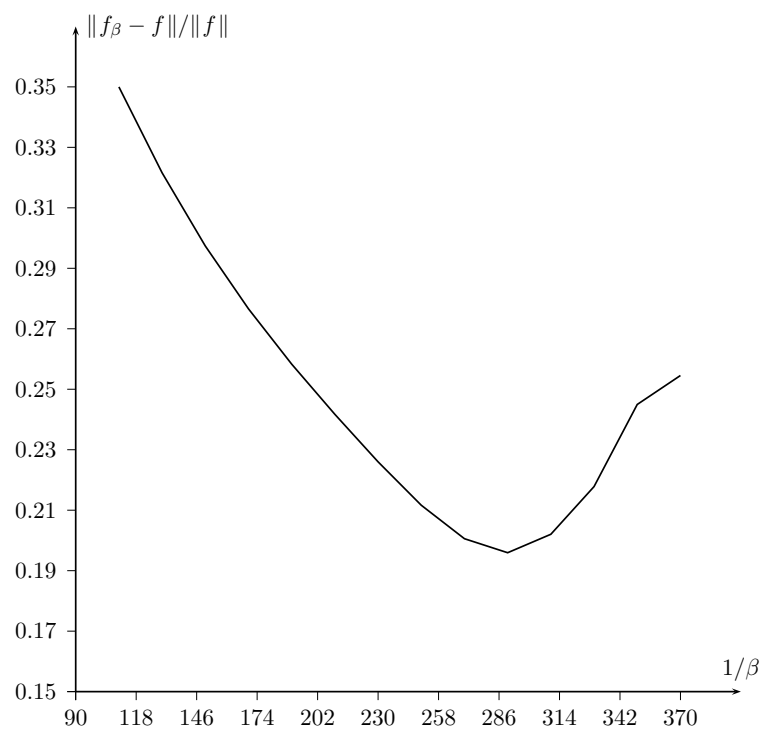


FIGURE 5.7 – Erreur relative en fonction de  $1/\beta$ .

## Chapitre 6

# Introduction de l'atténuation dans le modèle

### Présentation

J'ai déjà souligné (remarque 2.1.1, section 2.1.2) que l'absence d'atténuation pour l'onde de pression acoustique dans le modèle établi pour la TTA représentait une approximation contestable. En effet cette atténuation peut rendre les mesures incompatibles avec le modèle utilisé, introduisant ainsi des erreurs dans le processus d'inversion. Tout d'abord elle a tendance, comme nous allons le voir, à réduire la vitesse de propagation, tout en régularisant notablement l'onde mesurée. Par exemple, un premier examen de la situation conduit à considérer que les frottements entre particules, liés à la viscosité du milieu, doivent être la cause d'une déperdition d'énergie significative pour une onde de pression. Cette constatation se traduit par l'introduction d'un terme de viscosité dans l'équation d'Euler (2.2), conduisant elle-même à une équation des ondes atténuées appelée *équation des ondes thermo-visqueuse* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{p}_{att}}{\partial t^2}(x, t) - \Delta \mathbf{p}_{att}(x, t) - \nu \frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{p}_{att}(x, t) = 0, \\ \mathbf{p}_{att}(x, 0) = u(x), \\ \frac{\partial \mathbf{p}_{att}}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

La figure 6.1 illustre les propriétés régularisantes de cette équation.

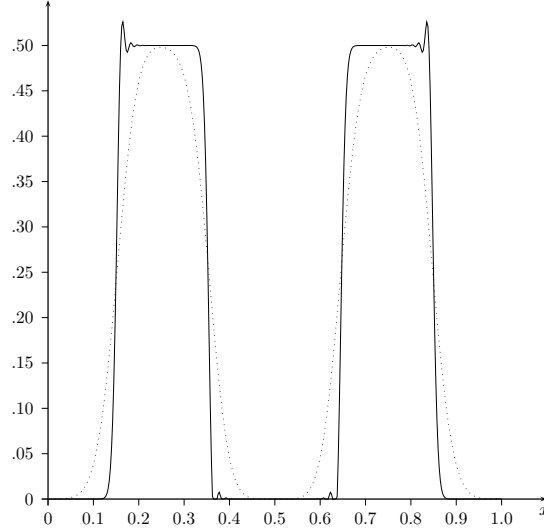


FIGURE 6.1 – Solutions de l'équation des ondes (ligne continue) et de l'équation thermo-visqueuse (pointillés) au temps  $T = 2$ . La condition initiale est un créneau centré en  $x = 0.5$ .

Outre la mollification évidente sur la figure, on peut constater un phénomène dérangentant du point de vue physique : au temps  $T$  la solution atténuée est non nulle en des points où la solution classique est restée nulle pour tout  $t \leq T$ . Si l'on pense la solution atténuée comme une convolution en temps de la solution classique, cela signifie que l'équation des ondes thermo-visqueuse utilise de l'information *dans le futur* ; on appelle cette propriété un *défait de causalité*. Dans cette situation, non seulement l'équation a peu de chance de coller à la réalité, mais elle va de plus accuser une vitesse de propagation du front d'onde infinie et une instabilité numérique due à la violation de la condition de Courant-Friedrich-Levy (CFL).

Mais, après tout, pourquoi considérer que l'onde atténuée  $\mathbf{p}_{att}$  est le résultat d'une convolution en temps de l'onde non atténuée  $\mathbf{p}$  ? Tout simplement parce que les seules mesures connues concernant l'atténuation d'une onde se propageant dans un milieu dispersif aboutissent à ce qu'on appelle *la loi de la puissance* (*power law* en anglais, voir [76, 82]), qui s'énonce comme suit :

Soit  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{p}_{att}$  des ondes de pression acoustique se propageant respectivement dans un milieu non dispersif et dispersif, avec pour condition initiale  $u = \delta_x$ , alors on a :

$$|\mathcal{F}_t \mathbf{p}_{att}(x, \xi)| = e^{-\alpha_0 \|x\| |\xi|^\gamma} |\mathcal{F}_t \mathbf{p}(x, \xi)|,$$

valable dans le domaine des petites fréquences, où  $\gamma$  est un paramètre dépendant du milieu.

Dès lors il paraît naturel, au vu de cette atténuation dépendant de la fréquence, de chercher  $\mathbf{p}_{att}$  comme une convolée en temps de  $\mathbf{p}$ . Plus précisément :

$$\mathcal{F}_t \mathbf{p}_{att}(x, \xi) = e^{-\alpha_* \|x\|} \mathcal{F}_t \mathbf{p}(x, \xi),$$

où la partie réelle de  $\alpha_*$  vérifie  $\alpha := \text{Re}(\alpha_*) \approx_{\xi \rightarrow 0} \alpha_0 |\xi|^\gamma$ . Même en exigeant en outre que le noyau de convolution résultant soit causal (nul pour les temps  $t < 0$ ), on dispose ici d'une grande liberté dans le choix de  $\alpha_*$ .

Le travail présenté ci-dessous introduit un cadre d'étude pour les différentes lois d'atténuation  $\alpha_*$  en les reliant explicitement aux propriétés des noyaux de convolution et aux équations des ondes atténuées qui en résultent. Il y est notamment démontré que la condition de *Kramers-Krönig*, habituellement considérée comme raisonnable pour assurer la causalité d'un modèle [85], et qui revient à la causalité de  $\mathcal{F}^{-1}(\alpha_*)$ , n'est pas suffisante pour que le noyau de convolution soit causal. Ainsi, deux des modèles les plus employés en TTA se retrouvent invalidés sur le plan de la causalité, ce que l'on peut résumer dans la proposition suivante :

**Proposition 6.0.1.** *I. La frequency power law exacte [83, 76], obtenue en étendant à toutes les fréquences la loi de la puissance, et qui conduit à :*

$$\alpha(\xi) = \alpha_0 |\xi|^\gamma$$

*et*

$$\alpha_*(\xi) = \frac{\alpha_0}{\cos \frac{\pi}{2} \gamma} (-i\xi)^\gamma,$$

*ne donne lieu à un modèle causal que pour  $\gamma \in [0, 1[$ .*

*II. L'équation des ondes thermovisqueuse correspond à la loi d'atténuation :*

$$\alpha_*(\xi) = i\xi - \frac{i\xi}{\sqrt{1 - \nu i\xi}}.$$

*Celle-ci approche la loi de la puissance avec  $\gamma = 2$  pour les petites fréquences, mais elle ne donne pas lieu à un modèle causal.*

Or, il est important de noter que les tissus souples à travers lesquels se propage le signal en TTA conduisent à un coefficient  $\gamma \in ]1, 2]$  (le cas  $\gamma = 2$  correspondant à l'atténuation purement visqueuse ayant lieu dans l'eau). Ainsi, à notre connaissance, aucun des modèles utilisés n'était en mesure de

rendre compte convenablement de l'atténuation subie par l'onde de pression mesurée en TTA.

S'agissant d'exhiber une équation raisonnable respectant la loi de la puissance pour des valeurs de  $\gamma$  compatibles avec les conditions de la TTA, c'est-à-dire  $\gamma \in ]1, 2]$  (voir [16] par exemple), le travail ci-dessous propose une équation des ondes thermo-visqueuse modifiée causale, afin que le traitement des données atténuées puisse se réduire à une simple déconvolution en temps. Elle admet pour loi d'atténuation :

$$\alpha_*(\xi) = -\frac{\alpha_1 i \xi}{\sqrt{1 + (-i\nu\xi)^{\gamma-1}}},$$

et elle peut s'écrire formellement, dans sa version homogène :

$$\left(I + \nu^{\gamma-1} D_t^{\gamma-1}\right) \Delta \mathbf{p}_{att} = \left(\alpha_1 I + (I + \nu^{\gamma-1} D_t^{\gamma-1})^{\frac{1}{2}}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{p}_{att},$$

où  $D_t^{\gamma-1}$  représente l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville [75].



# Causality analysis of frequency-dependent wave attenuation

Richard Kowar<sup>a,\*†</sup>, Otmar Scherzer<sup>b,c</sup> and Xavier Bonnefond<sup>d</sup>

Communicated by H. Ammari

The work is inspired by thermo- and photoacoustic imaging, where recent efforts are devoted to take into account attenuation and varying wave speed parameters. In this paper, we derive and analyze causal equations describing the propagation of attenuated pressure waves. We also review standard models, like frequency power laws, and the thermo-viscous equation and show that they lack causality in the parameter range relevant for biological photoacoustic imaging. To discuss causality in mathematical rigor we use the results and concepts of linear system theory. We present some numerical experiments, which show the physically unmeaningful behavior of standard attenuation models, and the realistic behavior of the novel models. Copyright © 2010 John Wiley & Sons, Ltd.

**Keywords:** attenuation; causality; mathematical analysis; power laws; thermo viscous equation; photoacoustic modeling

## 1. Introduction

The work is inspired by thermo- and photoacoustic imaging (see e.g. [1–6] for some articles related to the subject), where the problem is the reconstruction of the *absorption density* from measurements of the pressure outside of the object. This is the *Inverse Problem* according to the forward problem, which maps the absorption density onto the pressure by solving the *standard* wave equation. Various reconstruction methods have been suggested in the literature for photoacoustic imaging, which can for instance be found in the excellent survey [7]. Recent efforts have been made to take into account attenuation [8–10] and varying wave speed [11]. The standard model of attenuation (which is reviewed in Section 3) is formulated in the frequency range and models the physical reality that high-frequency components of waves are attenuated more rapidly over time.

In this paper, we review the standard attenuation models, like *power laws* [12–16] and the *thermo-viscous* wave equation [17]. In this context, we discuss causality, which is the desired feature of attenuation models. The lack of causality of standard models in the parameter range<sup>‡</sup> relevant for photoacoustic imaging requires to investigate novel equations, which are derived in Section 3 and the following.

We base the derivation of causal attenuation models on the mathematical concept of *linear system theory*, which can for instance be found in the book of Hörmander [19]. In Section 4 the abstract formulations are translated into equations which are formally similar to the wave equation. However, in general, the novel equations are integro-differential equations. An important issue is that the equations are formulated as inhomogeneous equations with homogeneous initial conditions, which is not standard for attenuated wave equations, where typically the equations are considered homogeneous with inhomogeneous initial conditions. For the standard wave equation these two concepts are equivalent, but only the one considered here is mathematically sensible for the attenuation model.

The approach leads to some novel causal attenuation models, in particular power law models (valid for a bounded frequency range), which are documented in the literature to be relevant for biological specimen (in the terminology used later on this means that  $\gamma \in (1, 2]$ —see [20, Chapter 7]) and also for castor oil, which satisfies a power law with index  $\gamma = 1.66$  [13]. These models are presented in Section 8. The rotationally symmetric examples, presented in Section 9, illustrate the unphysical behavior of some existing attenuation models. Aside from unmeaningfully physical effects, the stable and convergent numerical implementation of attenuated, non-causal wave equations is an unconsidered problem since these equations lack the Courant–Friedrich–Levy (CFL)

<sup>a</sup>Department of Mathematics, University of Innsbruck, Technikerstraße 21a/2, A-6020 Innsbruck, Austria

<sup>b</sup>Computational Science Center, University of Vienna, Nordbergstraße 19, A-1090 Vienna, Austria

<sup>c</sup>RICAM, Austrian Academy of Sciences, Altenbergerstraße 69, A-4040 Linz, Austria

<sup>d</sup>Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse Cedex 9, France

\*Correspondence to: Richard Kowar, Department of Mathematics, University of Innsbruck, Technikerstraße 21a/2, A-6020 Innsbruck, Austria.

†E-mail: richard.kowar@uibk.ac.at

‡According to experiments, the attenuation law of some biological tissue satisfies a power law for small frequencies with exponent lying in the range (1, 2]. See [18].

condition [21]. The attenuation models considered here have a finite front wave speed and therefore can be implemented in a stable manner. Thus, aside from physical considerations also from a point of view of stable numerical solution of wave equations questions of causality are most relevant. We note that in [22] an equation for acoustic propagation in inhomogeneous media with relaxation losses is derived, which satisfies causality and a frequency power law with exponent 2 for small frequencies.

Concerning the presentation of the paper, the basic notation and mathematical results are summarized in the appendix.

## 2. Linear system theory

This section surveys *linear system theory* (see e.g. [19, 23]), which provides the link between linear systems and convolution operators. For notational convenience, when we speak about functions they are understood in the most wide meaning of the word, and can for instance be distributions.

In the following, we give a characterization of *causal* functions and operators.

*Definition 2.1*

1. A function  $f := f(\mathbf{x}, t)$  defined on the Euclidean space over time (i.e. in  $\mathbb{R}^4$ ) is said to be *causal* if it satisfies

$$f(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{for } t < 0.$$

2. In this paper  $\mathcal{A}$  (with and without subscripts) denotes a real (that is, it is a mapping between sets of real functions on  $\mathbb{R}^4$ ) and bounded operator.

- $\mathcal{A}$  is *translation invariant* if for every function  $f$  and every linear transformation  $L := L(\mathbf{x}, t) := (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - t_0)$ , with  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  and  $t_0 \in \mathbb{R}$ , it holds that

$$\mathcal{A}(f \circ L) = (\mathcal{A}f)L.$$

Here  $\circ$  denotes the composition, i.e.  $(f \circ L)(\mathbf{x}, t) = f(L(\mathbf{x}, t))$ .

- $\mathcal{A}$  is called *causal*, if it maps causal functions to causal functions.
- The operator  $\mathcal{A}$  has a *causal domain of influence* if the function

$$T(\mathbf{x}) := \sup\{t : \mathcal{A}\delta_{\mathbf{x},t}(\mathbf{x}, \tau) = 0 \text{ for all } \tau \leq t\} \quad \text{for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

is rotationally symmetric and the derivative with respect to the radial component  $T'$  satisfies

$$0 < (T'(r))^{-1} \leq c_0 < \infty. \quad (1)$$

For convenience of notation we identify  $T(|\mathbf{x}|) = T(\mathbf{x})$ .

The function  $T$ , presumably it exists, corresponds to the travel time of a wavefront initiated at  $\mathbf{0}$  at  $t = 0$ . Equation (1) guarantees that the wavefront speed is finite.

*Remark 1*

If the operator  $\mathcal{A}$  models a physical process in a *homogeneous and isotropic medium*, then  $\mathcal{A}$  is a shift invariant and  $\mathcal{A}\delta_{\mathbf{x},t}$  is rotationally symmetric.

If  $T$  exists, and in addition satisfies (1), then the property of a causal domain of influence guarantees that a wavefront can propagate with a speed of at most  $c_0$ .

Now, we recall a fundamental mathematical theorem (see [19, Theorem 4.2.1]) of systems theory, which relates invariant operators with *space–time* convolutions.

*Theorem 2.1 (Hörmander [19, Theorem 4.2.1])*

Every linear (causal and) translation invariant operator  $\mathcal{A}$  can be written as a space–time convolution operator with (causal) kernel  $G$ . That is, for arbitrary  $f$  from a suitable class of functions we have

$$\mathcal{A}f = G *_{\mathbf{x},t} f. \quad (2)$$

In analogy to linear system theory we call the kernel  $G$  the *Green function* of  $\mathcal{A}$ . According to Definition 2.1 the considered operators are real and therefore the according Green functions are real valued too. From the definition of the Green function it follows that

$$G = \mathcal{A}\delta_{\mathbf{x},t}.$$

In the following example we review the Green function and the convolution operator according to the wave equation.

*Example 2.1*

We consider the standard wave equation in an isotropic medium with phase speed  $c_0 \in (0, \infty)$ :

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = -f, \quad (3)$$

together with *initial conditions*

$$p|_{t<0}=0 \quad \text{and} \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} p \right|_{t<0} = 0. \quad (4)$$

With source term  $f = \delta_{\mathbf{x},t}$ , the according solution  $G_0$  of (3) and (4) is the *Green function*

$$G_0(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta_t \left( t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0} \right)}{4\pi|\mathbf{x}|}. \quad (5)$$

Because of (5)  $G_0$  is commonly denoted as *spherical wave* originating from  $\mathbf{x}=\mathbf{0}$  at time  $t=0$ .

In the space–frequency domain the Green function can be expressed by

$$\mathcal{F}\{G_0\} := \mathcal{F}\{G_0\}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp\left(i\omega \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}\right)}{4\pi|\mathbf{x}|}.$$

It satisfies

$$\nabla \mathcal{F}\{G_0\} = \left[ \frac{i\omega}{c_0} - \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right] \cdot \mathcal{F}\{G_0\} \cdot \text{sgn}, \quad (6)$$

and is the solution of the *Helmholtz equation*

$$\nabla^2 \mathcal{F}\{G_0\} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \mathcal{F}\{G_0\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta_{\mathbf{x}}. \quad (7)$$

The operator

$$\mathcal{A}_0 f := G_0 *_{\mathbf{x},t} f$$

is causal and maps a causal function  $f$  onto the solution of (3) and (4).

### 3. Attenuation

In the chapter we investigated the causality of attenuation models in a homogeneous, isotropic medium. In mathematical terms, it is common to describe attenuation by a *multiplicative law* in the frequency range:

*Definition 3.1*

A real, bounded, linear, translation invariant operator  $\mathcal{A}$  with causal domain of influence is called *attenuation operator* if there exists a complex function  $\beta_* := \beta_*(r, \omega)$  such that the associated Green function  $G := \mathcal{A} \delta_{\mathbf{x},t}$  satisfies

$$\mathcal{F}\{G\}(\mathbf{x}, \omega) = \exp(-\beta_*(|\mathbf{x}|, \omega)) \cdot \mathcal{F}\{G_0\}(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \omega \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Here,  $\mathcal{F}$  is the Fourier transform (see Appendix).

We rewrite (8) in the space–time domain by using

$$K := K(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\beta_*)\}(|\mathbf{x}|, t). \quad (9)$$

Therefore

$$G(\mathbf{x}, t) = [K *_{\mathbf{x},t} G_0](\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} K\left(\mathbf{x}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}\right). \quad (10)$$

Since in the context of this paper the operator  $\mathcal{A}$  is real, the associated Green function is real-valued, and consequently  $\beta_*(r, \omega)$  has to be even with respect to  $\omega$  (cf. Property 5 in Appendix).

*Remark 2*

In physical terms attenuation is a result of frequency-dependent energy dissipation and therefore the ratio of the attenuated and un-attenuated wave amplitude must be smaller or equal to 1. That is

$$\exp(-\Re(\beta_*)) = \left| \frac{\mathcal{F}\{G\}}{\mathcal{F}\{G_0\}} \right| \leq 1.$$

This implies that the *attenuation coefficient*  $\beta_*$  satisfies  $\Re(\beta_*) \geq 0$ .

In the literature, a special form of the attenuation coefficient is assumed:

*Definition 3.2 (Standard Form)*

The *standard form* of  $\beta_*$  considered in the literature is (see e.g. [12])

$$\beta_*(r, \omega) = \alpha_*(\omega)r \quad \text{for } r > 0, \omega \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

The function  $\alpha := \Re(\alpha_*)$  is called *attenuation law*.

For the standard form  $\beta_*$  several properties for the attenuation operator are at hand. For instance, the following results concern travel time and causality.

*Theorem 3.1*

Let  $\mathcal{A}$  be an attenuation operator with  $\beta_*$  of standard form. Then the travel time satisfies  $T(|\mathbf{x}|) = |\mathbf{x}|/c$  for some constant  $0 < c \leq c_0$ .

*Proof*

The definition of the travel time  $T$  in Definition 2.1 states that  $T(|\mathbf{x}|)$  is the largest positive number such that for the Green function  $G = \mathcal{A}\delta_{\mathbf{x},t}$

$$G(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{for } t < T(|\mathbf{x}|).$$

This condition is equivalent to the condition that the function

$$(\mathbf{x}, t) \rightarrow G(\mathbf{x}, t + T(|\mathbf{x}|)) \quad \text{is causal.} \quad (12)$$

The operator  $\mathcal{A}$  is causal and has causal domain of influence, which implies that  $T(0) = 0$  and  $(T'(r))^{-1} \leq c_0$ . Consequently

$$T(|\mathbf{x}|) = \int_0^{|\mathbf{x}|} T'(r) dr \geq \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}. \quad (13)$$

$\tau(r) := T(r) - r/c_0$  denotes the largest number such that  $K(\mathbf{x}, \cdot + \tau(|\mathbf{x}|)) = (1/\sqrt{2\pi})\mathcal{F}\{\exp(-\beta_*)\}$  is causal. From (8) it follows that

$$K(\mathbf{x}, t) = K(\mathbf{x}/2, t) *_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}/2, t).$$

This and the Theorem of Supports (cf. [19]) imply that  $\tau(r) = 2\tau(r/2)$ , and consequently  $\tau$  is linear in  $r$  and after all  $T$  is linear as well.  $\square$

In particular, from (10) and Theorem 3.1 it follows that  $\mathcal{A}$  has a causal domain of influence if and only if  $K$  is a causal function.

*Remark 2*

In the literature (for instance in [16]) causality is aimed to be enforced by demanding that

$$\mathcal{F}^{-1}\{\alpha_*\} \text{ is causal.} \quad (14)$$

This is equivalent to the *Kramers–Kronig* relations for the  $m$ th derivative  $\alpha_*^{(m)}$  of some function  $\alpha_*$  are satisfied, i.e. there exists a non-negative integer  $m$ , such that

$$\Im(\alpha_*^{(m)}) = \mathcal{H}\{\Re(\alpha_*^{(m)})\} = \mathcal{H}\{\alpha^{(m)}\} \quad \text{and} \quad \alpha^{(m)} := \Re(\alpha_*^{(m)}) = -\mathcal{H}\{\Im(\alpha_*^{(m)})\}, \quad (15)$$

where  $\mathcal{H}\{\cdot\}$  is the Hilbert Transform (see Appendix).

Equation (14) already follows from the causality of  $K$ : From the definition of  $K$  it follows that

$$|\nabla K| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\mathcal{F}^{-1}\{\alpha_* \cdot \exp(-\alpha_* |\mathbf{x}|)\}|.$$

Using some sequence  $\{\mathbf{x}_n\}$  with  $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{0}$  and  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}$  shows that

$$\lim |\nabla K|(\mathbf{x}_n, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\mathcal{F}^{-1}\{\alpha_*\}|(t).$$

Owing to the causality of  $K$  the left-hand side is zero for  $t < 0$ , and thus  $\mathcal{F}^{-1}\{\alpha_*\}$  is causal.

However, as we show in Example 3.1 below, the causality of  $\mathcal{F}^{-1}\{\alpha_*\}$  does not imply the causality of  $K$ . In other words, in general, from the causality of  $\mathcal{F}^{-1}\{\alpha_*\}$  it cannot be deduced that  $\mathcal{A}$  has a causal domain of influence. As a consequence several attenuation models considered in the literature lack causality.

**Example 3.1** (Frequency power laws [12, 14])  
Consider the frequency power law,

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 |\omega|^\gamma, \quad (16)$$

where  $\gamma, \alpha_0 \geq 0$  and  $\gamma \notin \mathbb{N}$ . The Kramers–Kronig relation with differentiation index  $m=1$  is satisfied for the one-parametric family of complex extensions (as considered [14, 16])

$$\alpha_*(\omega) = \frac{\alpha_0}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right)} (-i\omega)^\gamma. \quad (17)$$

Basically, [19, Theorem 7.4.3] implies that for every polynomial  $p$  in  $-i\omega$  with non-negative real exponents,  $\mathcal{F}^{-1}\{p\}$  is causal. Hence if  $\gamma > 1$ , then

$$\alpha_*^{\parallel}(\omega) := \alpha_*(\omega) + a_0(-i\omega), \quad a_0 \in \mathbb{R},$$

has the same real part as  $\alpha_*$  and  $\mathcal{F}^{-1}\{\alpha_*^{\parallel}\}$  is causal. As a consequence the attenuation law  $\alpha$  together with the causality condition (14) does not uniquely determine the attenuation operator  $\mathcal{A}$  (cf. Definition 3.1).

Let  $\alpha_*$  be defined as in (17), then according to [19, Theorem 7.4.3]  $K$ , as defined in (9), is causal if and only if  $\gamma \in [0, 1)$ . Consequently, for frequency power laws with  $\gamma > 1$  the according operator  $\mathcal{A}$ , defined in Definition 3.1, does *not* have a causal domain of influence.

## 4. Equations for attenuated pressure waves

In this section, we formulate a causal wave equation which takes into account attenuation and review the literature (cf. [8, 9, 13–15]).

Let  $\mathcal{A}$  denote a translation invariant operator with causal domain of influence with travel time function  $T$  and  $c_0$  as in Definition 2.1. The Green function  $G$  satisfies (10) and (9) and therefore the according attenuation coefficient is given by

$$\beta_*(\mathbf{x}, \omega) = -\log \left\{ 2\sqrt{(2\pi)^3} |\mathbf{x}| \mathcal{F}\{G\left(\mathbf{x}, \cdot + \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}\right)\}(\omega) \right\}. \quad (18)$$

In the following, we rewrite the term  $\nabla^2 \mathcal{F}\{G\}$  from which we derive the Helmholtz equation for  $\mathcal{F}\{G\}$ . Using (10), which states that  $G = K *_t G_0 = \mathcal{A} \delta_{\mathbf{x},t}$ , and the product rule yields

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \nabla^2 \mathcal{F}\{G\} = \nabla^2 \mathcal{F}\{K\} \cdot \mathcal{F}\{G_0\} + 2\nabla \mathcal{F}\{K\} \cdot \nabla \mathcal{F}\{G_0\} + \mathcal{F}\{K\} \cdot \nabla^2 \mathcal{F}\{G_0\}. \quad (19)$$

To evaluate this expression, we calculate  $\nabla \mathcal{F}\{K\}$  and  $\nabla^2 \mathcal{F}\{K\}$ . From (9) it follows that

$$\nabla \mathcal{F}\{K\} = -\beta'_* \cdot \mathcal{F}\{K\} \cdot \text{sgn}, \quad (20)$$

where  $\beta'_*$  denotes the derivative of  $\beta_*(r, \omega)$  with respect to  $r$ . This together with the formula (A1) in the Appendix implies that

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{F}\{K\} &= -\nabla \cdot (\beta'_* \cdot \mathcal{F}\{K\} \cdot \text{sgn}) \\ &= -(\nabla \cdot \text{sgn}) \cdot \beta'_* \cdot \mathcal{F}\{K\} - (\text{sgn} \cdot \nabla \beta'_*) \cdot \mathcal{F}\{K\} - (\text{sgn} \cdot \nabla \mathcal{F}\{K\}) \cdot \beta'_* \\ &= \left[ -\frac{2}{|\mathbf{x}|} \cdot \beta'_* - \beta''_* + (\beta'_*)^2 \right] \cdot \mathcal{F}\{K\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Inserting (20) and (21) into (19) and using the identity  $G = K *_t G_0$  (cf. (10)) shows that

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \nabla^2 \mathcal{F}\{G\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -\frac{2}{|\mathbf{x}|} \cdot \beta'_* - \beta''_* + (\beta'_*)^2 \right] \cdot \mathcal{F}\{G\} \\ &\quad - 2\beta'_* \cdot \mathcal{F}\{K\} \cdot (\text{sgn} \cdot \nabla \mathcal{F}\{G_0\}) + \mathcal{F}\{K\} \cdot \nabla^2 \mathcal{F}\{G_0\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Together with (6) and (7), the last identity simplifies to

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{F}\{G\} &= \left[ -\frac{2}{|\mathbf{x}|} \cdot \beta'_* - \beta''_* + (\beta'_*)^2 \right] \cdot \mathcal{F}\{G\} - 2 \left[ \frac{i\omega}{c_0} - \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right] \cdot \beta'_* \cdot \mathcal{F}\{G\} \\ &\quad - \frac{\omega^2}{c_0^2} \cdot \mathcal{F}\{G\} - \mathcal{F}\{K\} \cdot \delta_{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Since  $\mathcal{F}\{K\}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \delta_{\mathbf{x}} = \mathcal{F}\{K\}(\mathbf{0}, \omega) \cdot \delta_{\mathbf{x}}$ , we obtain from (23) the Helmholtz equation

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{F}\{G\} - \left[ \beta'_* + \frac{(-i\omega)}{c_0} \right]^2 \cdot \mathcal{F}\{G\} \\ = -\beta''_* \cdot \mathcal{F}\{G\} - \mathcal{F}\{K\}(\mathbf{0}, \omega) \cdot \delta_{\mathbf{x}} \\ = -\beta''_* \cdot \mathcal{F}\{G\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\beta'_*(\mathbf{0}, \omega)) \cdot \delta_{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (24)$$

To reformulate (24) in space–time coordinates, we introduce two convolution operators

$$D_* f := K_* *_{\mathbf{x}} f \quad \text{and} \quad D'_* f := K'_* *_{\mathbf{x}} f, \quad (25)$$

where the kernels  $K_*$  and  $K'_*$  are given by

$$K_* := K_*(\mathbf{x}, t) := K_*(|\mathbf{x}|, t) \quad \text{and} \quad K_*(r, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{\beta'_*\}(r, t) \quad (26)$$

and

$$K'_* := K'_*(\mathbf{x}, t) := K'_*(|\mathbf{x}|, t) \quad \text{and} \quad K'_*(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{\beta''_*\}(r, t). \quad (27)$$

Using these operators and applying the inverse Fourier transform to (24) gives

$$\nabla^2 G - \left[ D_* + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 G = -D'_* G - K(\mathbf{0}, t) \delta_{\mathbf{x}}. \quad (28)$$

For a general source term  $f$ ,  $p_{\text{att}} := \mathcal{A}f = G *_{\mathbf{x}, t} f$  solves the equation

$$\nabla^2 p_{\text{att}} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_{\text{att}} = -\mathcal{A}_S f, \quad (29)$$

where  $\mathcal{A}_S$  denotes the space–time convolution operator with kernel

$$K_S := K_S(\mathbf{x}, t) := -\mathcal{B}G + D'_* G + K(\mathbf{0}, t) \cdot \delta_{\mathbf{x}} \quad (30)$$

where

$$\mathcal{B} := D_*^2 + \frac{2}{c_0} D_* \frac{\partial}{\partial t}. \quad (31)$$

Equation (29) is the pressure wave equation that obeys attenuation with attenuation coefficient (18).

#### Remark 4

In this remark we consider again the standard model, as in Definition 3.2. For this case the wave equation (29) can be casted in a form that resembles the standard attenuation wave equation (cf. Example 4.1). Since  $K$  is causal, it follows that  $K_*$  is causal too (the argumentation is analogous to Remark 2) and therefore the operator  $D_*$  is well-defined for all causal functions. Moreover, since  $K'_* = 0$ , it follows that  $D'_* \equiv 0$ . Using that  $K_*$  depends only on  $t$  it follows that

$$(D_* G) *_{\mathbf{x}, t} f = [K_* *_{\mathbf{x}, t} G] *_{\mathbf{x}, t} f = K_* *_{\mathbf{x}, t} [G *_{\mathbf{x}, t} f] = D_*(G *_{\mathbf{x}, t} f).$$

Convolving each term in (28) with a function  $f$ , using the previous identity and that  $D'_* \equiv 0$ , it follows that

$$\nabla^2 p_{\text{att}} - \left[ D_* + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 p_{\text{att}} = -f. \quad (32)$$

Since  $D_*$  does not depend on  $\mathbf{x}$ , a solution of (32) with source term

$$f(\mathbf{x}, t) = \delta_X(x - x_0) f_0(t), \quad \mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$$

depends only on  $x$  and  $t$  by symmetry, i.e.  $p_{\text{att}}$  is a plane wave satisfying

$$\frac{\partial^2 p_{\text{att}}}{\partial x^2}(x, t) - \left[ D_* + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 p_{\text{att}}(x, t) = -\delta_X(x - x_0) f_0(t).$$

Because  $D_*$  depends on the same  $\alpha_*(\omega)$  as in the 3D case, the standard attenuation form does not depend on the space dimension. However, we emphasize that

$$f_0(t) = \delta_t(t) \quad \text{and} \quad f_0(t) = \frac{\partial \delta_t}{\partial t}(t)$$

produce qualitatively different plane waves. Which type of plane wave is usually used to model 1D attenuation is not clear, since the source term is not specified in the literature (cf. [14, 16]). Anyway, we see that our approach starting from a 3D spherical wave  $G$ , together with the superposition principle, also contains the 1D attenuation models.

In the following, we review some wave equations obeying attenuation, which are frequently considered in the literature:

#### Example 4.1

- For  $\gamma > 0$  and  $\gamma \notin \mathbb{N}$ , denote by  $D_t^\gamma$  be the *Riemann–Liouville fractional derivative* (see [24, 25]) with respect to time. It is defined in the Fourier domain by

$$\mathcal{F}\{D_t^\gamma f\} = (-i\omega)^\gamma \mathcal{F}\{f\} \quad (33)$$

and satisfies

$$D_t^{2\gamma} f = D_t^\gamma D_t^\gamma f \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t} D_t^\gamma f = D_t^\gamma \frac{\partial}{\partial t} f = D_t^{\gamma+1} f. \quad (34)$$

Now, we consider the attenuation coefficient

$$\beta_*(r, \omega) := \tilde{\alpha}_0 (-i\omega)^\gamma r \quad \text{with} \quad \tilde{\alpha}_0 := \alpha_0 / \cos(\gamma\pi/2), \quad (35)$$

which satisfies the attenuation law

$$\Re(\beta_*) (r, \omega) = \alpha(\omega) r \quad \text{and} \quad \alpha(\omega) = \alpha_0 |\omega|^\gamma$$

(cf. Example 3.1 and [14, 16]). Let  $D_*$  denote the time-convolution operator with kernel  $K_*$  defined by (26) and (35). Then from (33) and  $K_* = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\alpha}_0 (-i\omega)^\gamma\} / \sqrt{2\pi}$  it follows that  $D_* = \tilde{\alpha}_0 D_t^\gamma$ . In [9, 15] (see also [13, 14]) the following equation for the pressure function  $p_{\text{att}}$  of attenuated waves is investigated:

$$\nabla^2 p_{\text{att}} - \left[ \tilde{\alpha}_0 D_t^\gamma + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 p_{\text{att}} = -f, \quad (36)$$

which is equivalent to Equation (32) with operator  $D_* = \tilde{\alpha}_0 D_t^\gamma$ . Let  $\mathcal{A}$  denote the solution operator of (36), then from [19, Theorem 7.4.3] it follows that  $\mathcal{A}$  has a causal domain of influence only for  $\gamma \in [0, 1)$ .

- Let  $\gamma > 0, \gamma \notin \mathbb{N}$ . Neglecting in (36) the operator  $\tilde{\alpha}_0^2 D_t^{2\gamma}$  (which one finds after expanding the decomposition operator) one finds Szabo's equation [13]

$$\nabla^2 p_{\text{att}} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_{\text{att}} - \frac{2\tilde{\alpha}_0}{c_0} D_t^{\gamma+1} (p_{\text{att}}) = -f. \quad (37)$$

This equation is equivalent to Equation (32) if we define the kernel of  $D_*$  by (26) with

$$\beta_*(r, \omega) := \tilde{\alpha}_0 (-i\omega)^\gamma r \quad \text{and} \quad \alpha_*(\omega) = \frac{i\omega}{c_0} + \frac{1}{c_0} \sqrt{(-i\omega)^2 + 2\tilde{\alpha}_0 c_0 (-i\omega)^{\gamma+1}}. \quad (38)$$

#### Remark 5

We note that the attenuation laws (real part of  $\alpha_*(\omega)$ ) in Example 4.1 are very similar for small frequencies. Indeed, for the experimental measurable frequencies both laws are very similar.

Again, if  $\mathcal{A}$  denotes the solution operator of (37), then [19, Theorem 7.4.3] implies that  $\mathcal{A}$  has a causal domain of influence only for  $\gamma \in [0, 1)$ .

In the literature, the standard attenuation models (36) and (37) are considered as *homogeneous Cauchy problems* with *inhomogeneous* initial conditions. In contrast, in our setting, we consider *inhomogeneous Cauchy problems* with *homogeneous* initial conditions. In the following section we show that the two concepts can be equivalent. However, in general, only the concept suggested here leads to a rigorous framework, in which we can define solution operators for attenuated wave equations.

For the readers convenience, we summarize some important notation and facts in the following table. Note the difference between  $K$ ,  $K_*$  and  $K'_*$ , respectively, with respect to the involved exponential function.

Kernel	General	Standard form	Convolution operator
$K$ (9)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\beta_*)\}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\alpha_* \mathbf{x} )\}$	
$K_*$ (26)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{\beta'_*\}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{\alpha_*\}$	$D_*$ (25)
$K'_*$ (26)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{\beta''_*\}$	0	$D'_*$ (25)

## 5. The homogeneous Cauchy problem with memory

We consider the standard attenuation model  $\beta_*(r, \omega) = \alpha_*(\omega)r$ . Let  $\mathcal{A}$  denote a translation invariant operator with causal domain of influence and let the operator  $D_*$  be as defined as in (25).

In this section, we investigate under which conditions the inhomogeneous wave Equation (32) with homogeneous initial conditions (4) (where  $p$  is replaced by  $p_{\text{att}}$ ) and the homogeneous equation

$$\nabla^2 q_{\text{att}} - \left[ D_* + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 q_{\text{att}} = 0 \quad (39)$$

with the inhomogeneous initial conditions

$$q_{\text{att}} = q_0 \quad \text{for } t \leq 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t} q_{\text{att}} \Big|_{t=0+} = \frac{\partial}{\partial t} q_0 \Big|_{t=0-} \quad (40)$$

are equivalent. That is, both equations have the same solution for  $t > 0$ .

*Theorem 5.1*

Assume that (39), (40) and (32), (4) have unique solutions, respectively. Then  $q_{\text{att}} = p_{\text{att}}$  for  $t > 0$  if and only if  $q_0$  and  $p_{\text{att}}$  are related by the following conditions:

$$\varphi := \lim_{t \rightarrow 0-} q_0 = \lim_{t \rightarrow 0+} p_{\text{att}}, \quad \psi := \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{\partial}{\partial t} q_0 = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\partial}{\partial t} p_{\text{att}} \quad (41)$$

and

$$H \cdot \mathcal{B} q_0 = -f + \frac{1}{c_0^2} \left( \psi \cdot \delta_t + \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta_t \right), \quad (42)$$

with  $\mathcal{B}$  is as in (31) and  $H$  is the Heaviside function.

*Proof*

$\Rightarrow$ : Assume that  $q_{\text{att}} = p_{\text{att}}$  for  $t > 0$ . Then, using that  $p_{\text{att}} = 0$  for  $t < 0$  implies that

$$p_{\text{att}} = H \cdot q_{\text{att}} \quad \text{and} \quad q_{\text{att}} = p_{\text{att}} + q_0. \quad (43)$$

In particular, property (41) holds. Moreover, (43) implies

$$\nabla^2 p_{\text{att}} = H \cdot \nabla^2 q_{\text{att}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_{\text{att}} = H \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} q_{\text{att}} + \psi \cdot \delta_t + \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta_t. \quad (44)$$

Since

$$\mathcal{B} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left[ D_* + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 \quad (45)$$

it follows from (44), (45) and (43) that

$$\nabla^2 p_{\text{att}} - \mathcal{B} p_{\text{att}} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_{\text{att}} + f = H \cdot \left[ \nabla^2 q_{\text{att}} - \mathcal{B} q_{\text{att}} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} q_{\text{att}} \right] - \mathcal{B} p_{\text{att}} + H \cdot \mathcal{B} q_{\text{att}} - \frac{1}{c_0^2} \left( \psi \cdot \delta_t + \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta_t \right) + f. \quad (46)$$

Using the definitions of  $q_{\text{att}}$  and  $p_{\text{att}}$ , (46) simplifies to

$$-\mathcal{B} p_{\text{att}} + H \cdot \mathcal{B} q_{\text{att}} - \frac{1}{c_0^2} \left( \psi \cdot \delta_t + \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta_t \right) + f = 0.$$

Since  $\mathcal{B}$  is a causal operator and  $p_{\text{att}}$  is a causal function, we have  $\mathcal{B} p_{\text{att}} = H \cdot \mathcal{B} p_{\text{att}}$ . This together with (43) implies that  $-\mathcal{B} p_{\text{att}} + H \cdot \mathcal{B} q_{\text{att}} = H \cdot \mathcal{B} q_0$ . Hence

$$H \cdot \mathcal{B} q_0 - \frac{1}{c_0^2} \left( \psi \cdot \delta_t + \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta_t \right) + f = 0$$

and thus (42) holds. This proves the first direction of the theorem.



⇐: To prove the opposite direction let

$$\tilde{p}_{\text{att}} := H \cdot q_{\text{att}} \text{ such that } q_{\text{att}} = \tilde{p}_{\text{att}} + q_0.$$

We prove that  $p_{\text{att}} = \tilde{p}_{\text{att}}$  holds for  $t > 0$ . Similarly as in part (a) of the proof it follows that

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{p}_{\text{att}} - \mathcal{B} \tilde{p}_{\text{att}} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{p}_{\text{att}} &= H \cdot \left[ \nabla^2 q_{\text{att}} - \mathcal{B} q_{\text{att}} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} q_{\text{att}} \right] \\ &\quad + H \cdot \mathcal{B} q_0 - \frac{1}{c_0^2} \left( \psi \cdot \delta_t + \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta_t \right) \end{aligned}$$

holds. Since  $q_{\text{att}}$  solve problem (39), (40) and condition (42) is satisfied, the last identity simplifies to

$$\nabla^2 \tilde{p}_{\text{att}} - \mathcal{B} \tilde{p}_{\text{att}} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{p}_{\text{att}} = -\tilde{f}.$$

Hence, we have shown that  $\tilde{p}_{\text{att}}$  solves problem (32), (4) and since this problem has the unique solution  $p_{\text{att}}$ , it follows  $\tilde{p}_{\text{att}} = p_{\text{att}}$ . In summary we have shown that

$$p_{\text{att}} = \tilde{p}_{\text{att}} = q_{\text{att}} \quad \text{for } t > 0,$$

which proves the assertion.  $\square$

#### Remark 6

In the absence of attenuation the operator  $\mathcal{B}$  is the zero operator and condition (42) reduces to

$$f = \frac{1}{c_0^2} \left( \psi \cdot \delta_t + \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta_t \right).$$

In this case the solutions of

$$\begin{aligned} \nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p &= -f, & \nabla^2 q - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} q &= 0, \\ p|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} p|_{t=0} = 0, & q|_{t=0} &= \varphi, \quad \frac{\partial}{\partial t} q|_{t=0} = \psi, \end{aligned}$$

are identical for  $t > 0$ .

## 6. The thermo-viscous wave equation

In this section, we show that the *thermo-viscous* wave equation (see e.g. [17]) is not causal (see Theorem 6.1 below). The formalism introduced here will enable us to derive a causal variant of the thermo-viscous equation which satisfies the same attenuation law.

The thermo-viscous wave equation models propagation of pressure waves in viscous media and reads as follows:

$$\left( I + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 p_{\text{att}} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_{\text{att}} = -F. \quad (47)$$

Here,  $\tau_0$  and  $c_0$  denote the *relaxation time* and the *thermodynamic speed*, respectively, and  $F$  models sources.

In the following we transform the thermo-viscous wave equation into the form (28), which enables us to deduce that the thermo-viscous equation is not causal. For these purpose we consider the attenuation coefficient

$$\beta_*(r, \omega) = \alpha_*(\omega) r \quad \text{with } \alpha_*(\omega) = \frac{i\omega}{c_0} - \frac{i\omega}{c_0 \sqrt{1 - \tau_0 i\omega}}. \quad (48)$$

and the time convolution operators  $T^{1/2}$  and  $L^{1/2}$  with kernels

$$K_{T^{1/2}} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \{ (1 - i\tau_0 \omega)^{-1/2} \} \quad \text{and} \quad K_{L^{1/2}} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \{ (1 - \tau_0 i\omega)^{1/2} \},$$

respectively. Since  $K_*$  satisfies (26) it can be rewritten in the following form:

$$K_* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{i\omega}{c_0} - \frac{i\omega}{c_0 \sqrt{1 - i\omega \tau_0}} \right\} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \delta_t + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} K_{T^{1/2}}. \quad (49)$$

Therefore, the according convolution operator  $D_*$  is given by

$$D_* = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{c_0} T^{1/2} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (50)$$

In the following we summarize some properties of the operators  $T^{1/2}$ ,  $L^{1/2}$  and  $D_*$ , and the associated kernels.

*Lemma 6.1*

The kernel functions  $K_{T^{1/2}}$ ,  $K_{L^{1/2}}$  and the operators  $L^{1/2}$ ,  $T^{1/2}$ ,  $D_*$ , respectively, satisfy:

1. For  $\tau_0 = 0$ ,  $T^{1/2} = L^{1/2} = I$  and  $K_{T^{1/2}} = K_{L^{1/2}} = \delta_t$ .

$$2. \quad K_{T^{1/2}}(t) = \frac{\sqrt{2\pi} H(t) \exp(-t/\tau_0)}{\Gamma(1/2) \tau_0^{1/2} t^{1/2}}. \quad (51)$$

3.  $L^{1/2}$  is the inverse of  $T^{1/2}$ ,

4. Let  $L := (L^{1/2})^2$  and  $T := (T^{1/2})^2$ , then

$$L = I + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{and} \quad T = L^{-1}. \quad (52)$$

5.  $D'_* \equiv 0$  and for  $\tau_0 = 0$  also  $D_* \equiv 0$ .

$$6. \quad \left[ D_* + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{c_0^2} T \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

*Proof*

1. The first item is a trivial consequence of properties of the Fourier transform  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ .

2. With the substitution  $s = -i\omega\tau_0$  we derive the relation with the inverse Laplace transformation  $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$  (for a definition and some basic properties see the appendix of this paper)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{(1 - i\omega\tau_0)^{-1/2}\}(t) &= \frac{1}{i\tau_0\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{i\infty} \exp(st/\tau_0) \cdot (1+s)^{-1/2} ds \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\tau_0} \mathcal{L}^{-1}\{(1+s)^{-1/2}\}(t/\tau_0). \end{aligned} \quad (53)$$

Using the properties (A3) and (A4) of the inverse Laplace transformation the assertion follows.

3. From

$$K_{T^{1/2}} * K_{L^{1/2}} = K_{L^{1/2}} * K_{T^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta_t,$$

it follows that for each function  $f$

$$\begin{aligned} T^{1/2} L^{1/2} f &= K_{T^{1/2}} * K_{L^{1/2}} * f = \delta_t * f = f \\ L^{1/2} T^{1/2} f &= K_{L^{1/2}} * K_{T^{1/2}} * f = \delta_t * f = f. \end{aligned} \quad (54)$$

4. Since

$$K_{L^{1/2}} * K_{L^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{1 - i\omega\tau_0\} = \delta_t - \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \delta_t,$$

it follows that

$$Lf = K_{L^{1/2}} * K_{L^{1/2}} * f = \left( \delta_t - \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) * f = \left( I + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) f.$$

The assertion  $T = L^{-1}$  is then a consequence of the previous item.

5. Since  $K_*$  does not depend on  $|\mathbf{x}|$  and  $K'_*$  is the kernel of  $D'_*$ , it follows that  $K'_* = 0$ , i.e.  $D'_* \equiv 0$ . The second statement is a direct consequence of Item 1 which states that  $T^{1/2} = I$  for  $\tau_0 = 0$ .

6. Follows from (50). □

The thermo-viscous wave equation (47) can be put in formal relation to the wave equation (28) by identifying an appropriate operator  $D_*$  as in (50):

Utilizing Item 6 of Lemma 6.1 in Equation (32) and taking into account that  $D'_* \equiv 0$  (cf. Item 5 of Lemma 6.1) shows that the solution of the thermo-viscous wave equation (47) with  $F := Lf$  satisfies

$$\nabla^2 p_{\text{att}} - \left[ D_* + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 p_{\text{att}} = \nabla^2 p_{\text{att}} - \frac{1}{c_0^2} T \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_{\text{att}} = -f.$$

Conversely, the solution of Equation (32) with  $D_*$  defined as in (50) satisfies the thermo-viscous wave equation (47) with  $F = Lf$ .

#### Theorem 6.1

Let  $\alpha_*$  be defined as in (48). Then  $\Re(\alpha_*)$  and  $\Im(\alpha_*)$  satisfy the Kramers–Kronig relation, but the solution operator  $\mathcal{A}$  of the thermo-viscous wave equation does not have a causal domain of influence.

#### Proof

Since  $K_*$  defined as in (49) is causal, it follows that  $\Re(\alpha_*)$  and  $\Im(\alpha_*)$  satisfy the Kramers–Kronig relation. From [19, Theorem 7.4.3] it follows that the kernel  $K := (1/\sqrt{2\pi})\mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\alpha_*|\mathbf{x}|)\}$  is not causal and as a consequence the according solution operator of the thermo-viscous wave equation does not have a causal domain of influence.  $\square$

#### Remark 7

From (48) it follows that the attenuation law  $\alpha = \Re(\alpha_*)$  approximates for small frequencies, the frequency power law with  $\gamma = 2$ .

## 7. A causal thermo-viscous wave equation

Below we discuss a causal variant of the thermo-viscous wave equation.

Let  $\alpha_1 \geq 0$ . Theorem 7.1 below shows that the attenuation operator with attenuation coefficient of standard form  $\beta_*(r, \omega) = \alpha_*^C(\omega)r$  and

$$\alpha_*^C(\omega) = -\frac{\alpha_1 i\omega}{c_0 \sqrt{1 - \tau_0 i\omega}} \quad (55)$$

has a causal domain of influence. The operator  $D_*$  and its kernel  $K_*$  read as follows:

$$D_* := \frac{\alpha_1}{c_0} T^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{and} \quad K_* = \frac{\alpha_1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} K_{T^{1/2}}. \quad (56)$$

Note that  $D'_* \equiv 0$ , since  $K_*$  does not depend on  $|\mathbf{x}|$ .

For  $\alpha_1 = 0$ ,  $D_* \equiv 0$  and thus Equation (28) with operator  $D_*$  defined by (56) is the standard wave equation (without attenuation). Since

$$\left( D_* + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{c_0^2} \left[ I + \alpha_1 T^{1/2} \right]^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{and} \quad L = T^{-1},$$

Equation (28) can be rewritten as

$$\left( I + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 p_{\text{att}} - \left[ \alpha_1 I + L^{1/2} \right]^2 \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_{\text{att}} = - \left( I + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta_{\mathbf{x},t}. \quad (57)$$

#### Theorem 7.1

Let  $\alpha_*$  and  $\alpha_*^C$  be defined as in (48) and (55), respectively. Then  $\Re(\alpha_*^C)$  and  $\Im(\alpha_*^C)$  satisfy the Kramers–Kronig relation and  $\Re(\alpha_*) = \Re(\alpha_*^C)$ . The solution operator  $\mathcal{A}$  of Equation (57) has a causal domain of influence.

#### Proof

Since  $K_*$  defined as in (56) is causal, it follows that  $\Re(\alpha_*^C)$  and  $\Im(\alpha_*^C)$  satisfy the Kramers–Kronig relation. Comparison of  $\alpha_*$  defined as in (48) and  $\alpha_*^C$  defined as in (55) shows that  $\Re(\alpha_*) = \Re(\alpha_*^C)$ . From [19, Theorem 7.4.3] it follows that the kernel  $K := (1/\sqrt{2\pi})\mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\alpha_*^C|\mathbf{x}|)\}$  is causal and as a consequence the solution operator of Equation (57) has a causal domain of influence.  $\square$

#### Remark 8

In ultrasound imaging soft tissue is often modeled as a viscous fluid and therefore (57) is a potential model, on which thermoacoustic tomography can be based on. Moreover, the attenuation of tissue is frequently modeled as a power frequency law with  $\gamma \in (1, 2)$ .

## 8. Causal wave equations satisfying frequency power laws for small frequencies with $\gamma \in (1, 2]$

In Example 3.1 we have shown that the frequency power law does not yield a causal wave equation when  $\gamma \geq 1$ . In this section, we derive causal wave equations for attenuation laws which approximate frequency power laws for *small frequencies* with exponent  $\gamma \in (1, 2]$ , where for  $\gamma = 2$  we get the causal variant of the thermo-viscous wave equation (57).

Here we follow the notation of the previous section and introduce the following families of operators: For constants  $\gamma \in (1, 2]$ ,  $\tau_0 \geq 0$  and  $\alpha_1 \geq 0$  let  $T_\gamma^{1/2}$  and  $L_\gamma^{1/2}$  denote time convolution operators with kernels:

$$K_{T_\gamma^{1/2}} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \{ (1 + (-i\omega\tau_0)^{\gamma-1})^{-1/2} \},$$

$$K_{L_\gamma^{1/2}} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \{ (1 + (-i\omega\tau_0)^{\gamma-1})^{1/2} \}.$$

We set  $T_\gamma := (T_\gamma^{1/2})^2$  and  $L_\gamma := (L_\gamma^{1/2})^2$ . We emphasize that  $T_2^{1/2} = T^{1/2}$ , where  $T^{1/2}$  is the operator in the thermo-viscous case. The operators  $T_\gamma^{1/2}$  and  $L_\gamma^{1/2}$  satisfy similar properties as the operators  $T^{1/2}$  and  $L^{1/2}$  in the thermo-viscous case:

The following lemma is proven analogously as Lemma 6.1.

**Lemma 8.1**

- For  $\tau = 0$  we have

$$T_\gamma^{1/2} = L_\gamma^{1/2} = I \quad \text{and} \quad K_{T_\gamma^{1/2}} = K_{L_\gamma^{1/2}} = \delta_t.$$

- $L_\gamma^{1/2}$  is the inverse of  $T_\gamma^{1/2}$ .
- Let  $D_t^{\gamma-1}$  be the fractional derivative of order  $\gamma-1$ , as defined as in (33), then

$$L_\gamma = I + \tau_0^{\gamma-1} D_t^{\gamma-1}.$$

In analogy to Section 6 we consider now the standard attenuation coefficient with

$$\alpha_*(\omega) = -\frac{\alpha_1 i\omega}{c_0 \sqrt{1 + (-i\tau_0\omega)^{\gamma-1}}}. \quad (58)$$

Here,  $\alpha_1$ ,  $\tau_0$  and  $c_0$  are positive constants that are medium specific. The operator  $D_*$  and its kernel  $K_*$  are given by

$$D_* := \frac{\alpha_1}{c_0} T_\gamma^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{and} \quad K_* = \frac{\alpha_1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} K_{T_\gamma^{1/2}}. \quad (59)$$

Moreover, the kernel  $K$ , defined by (9), reads as follows:

$$K(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp \left( \frac{\alpha_1 i\omega |\mathbf{x}|}{c_0 \sqrt{1 + (-i\tau_0\omega)^{\gamma-1}}} \right) \right\} (t) \quad (60)$$

For  $\omega$  small we have

$$\alpha(\omega) \sim \alpha_0 |\tau_0 \omega|^\gamma \quad \text{with} \quad \alpha_0 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(\gamma-1)\right)}{2\tau_0 c_0}.$$

Moreover, we note that the phase speed  $c(\omega)$  is defined by

$$\frac{1}{c(\omega)} - \frac{1}{c_0} = -\frac{\Im(\alpha_*(\omega))}{\omega}$$

and thus from  $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - x/2$  ( $|x| < 1$ ) and  $(-i\omega)^\gamma = |\omega|^\gamma e^{-i\text{sgn}(\omega)\pi\gamma/2}$ , it follows for small frequencies

$$\frac{1}{c(\omega)} - \frac{1}{c_1} \approx \alpha_0 \tan(\pi\gamma/2) |\omega|^{\gamma-1} \quad \text{for } \alpha_0 > 0, \gamma \in (1, 2)$$

with

$$c_1 := c_0 / (1 + \alpha_1) \quad \text{and} \quad \alpha_1 \tau_0^{\gamma-1} := -\frac{2c_0 \alpha_0 \tan(\pi\gamma/2)}{\cos(\pi(\gamma-1)/2)} > 0.$$

Hence the velocity dispersion law (21) with  $\omega_1 := 0$  in [16] (see also [14]) holds for small frequencies.

The wave equation (28) with  $D_*$  as in (59) reads as follows:

$$(I + \tau_0^{\gamma-1} D_t^{\gamma-1}) \nabla^2 p_{\text{att}} - [\alpha_1 I + L_\gamma^{1/2}]^2 \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_{\text{att}} = -F. \quad (61)$$

In particular, for  $\gamma = 2$  we recover the causal variant of the thermo-viscous wave equation (57).

**Theorem 8.1**

The solution operator of Equation (61) has a causal domain of influence.

**Proof**

From [19, Theorem 7.4.3] it follows that  $K$  from (60) is causal and thus the solution operator of (61) has a causal domain of influence.  $\square$

## 9. Examples

In this section, we present some calculations, highlighting the effects of non-causality. In all examples  $\beta_*$  is of standard form (11) and the solution operator  $\mathcal{A}$  determined by  $\beta_*$  has the Green function

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-\beta_*) \cdot \exp(-i \cdot (t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}))}{4\pi|\mathbf{x}|} d\omega.$$

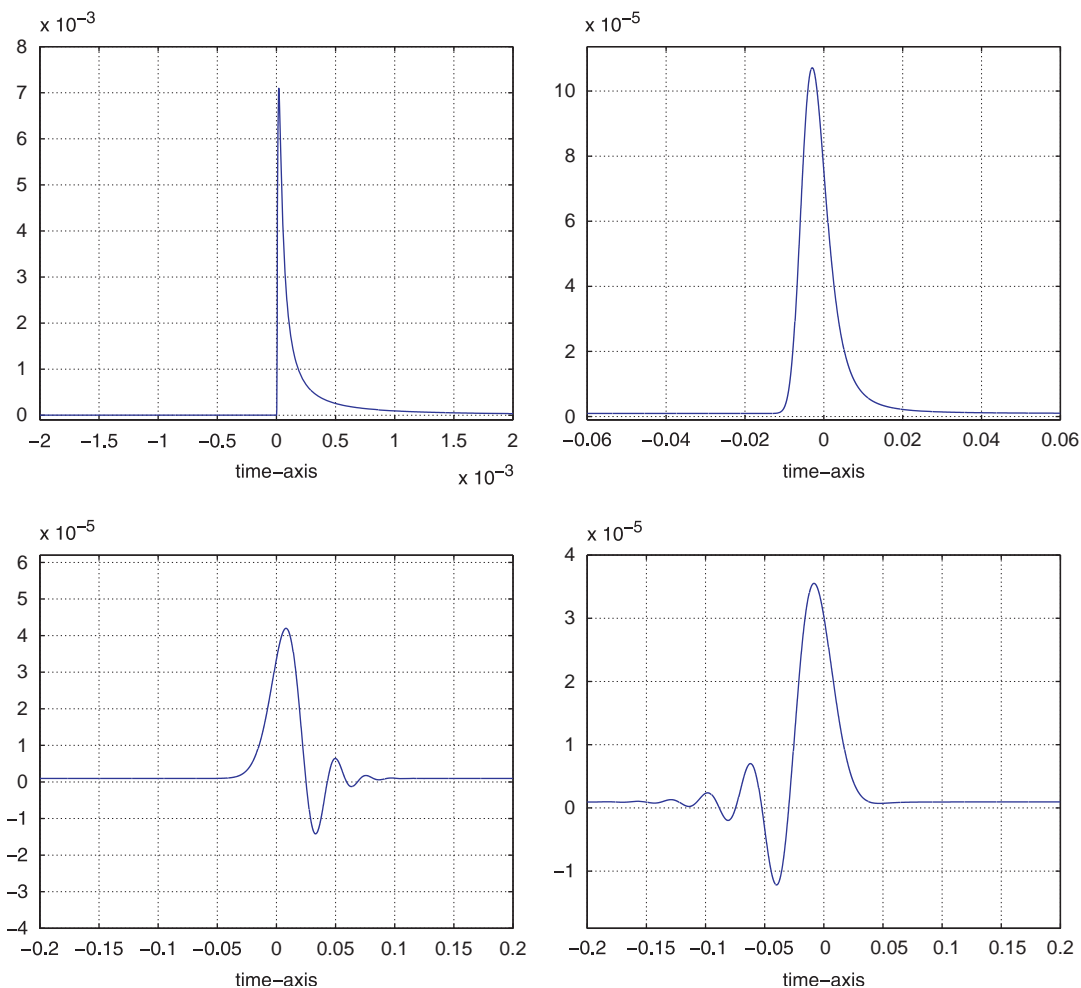
We recall that the operator  $\mathcal{A}$  has a causal domain of influence if and only if  $\mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\beta_*)\}$  is a causal function. In other words, non-causality can be observed if

$$\mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\beta_*)\}(t) \neq 0 \quad \text{for some } t < 0.$$

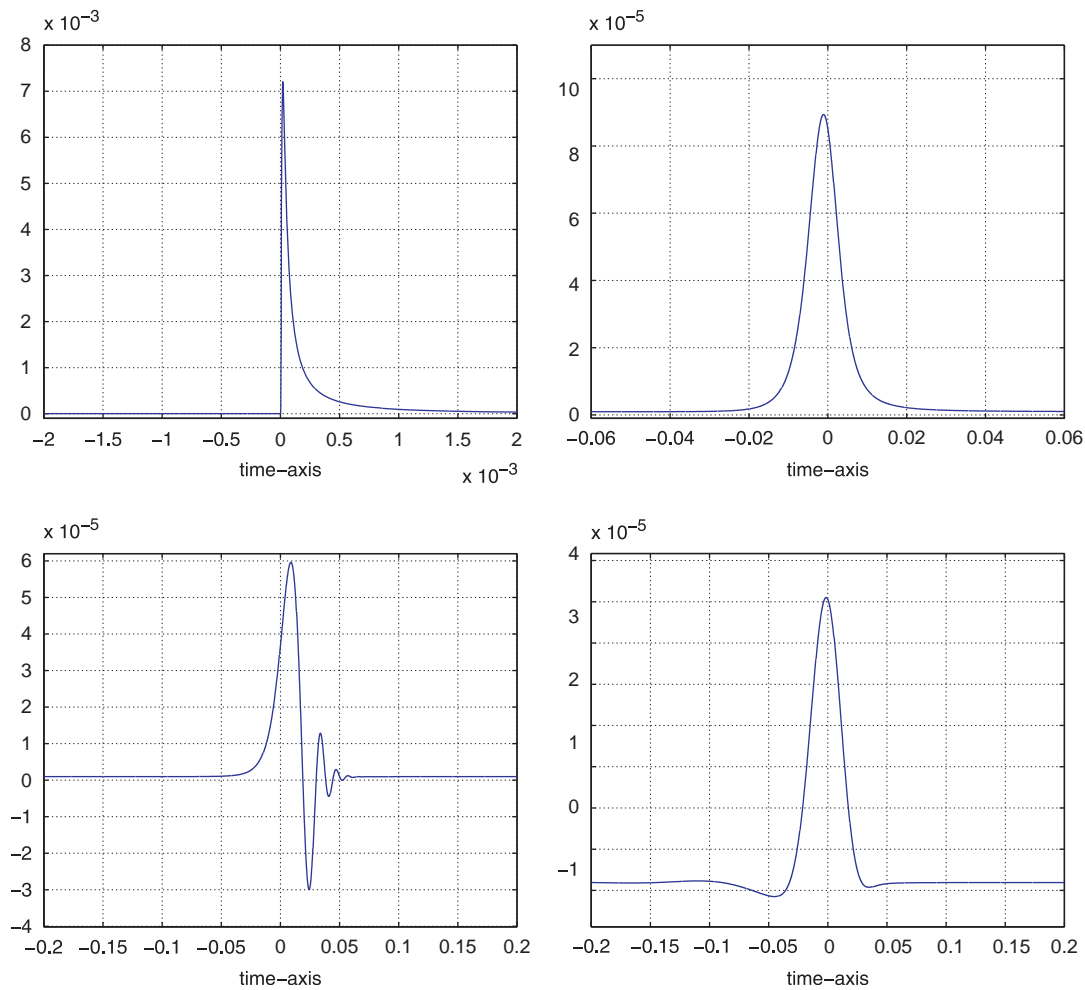
All numerical simulations were performed in MATLAB with the fft-subroutine.

**Frequency power law:** Let  $\alpha = \alpha_0 |\omega|^\gamma$  with some  $\gamma > 0$ . The extension  $\alpha_*$  by the Kramers–Kronig relation is given by (17). Figure 1 shows simulations of  $\mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\beta_*)\}$ , which illustrate that causality only holds for  $\gamma \in [0, 1)$ .

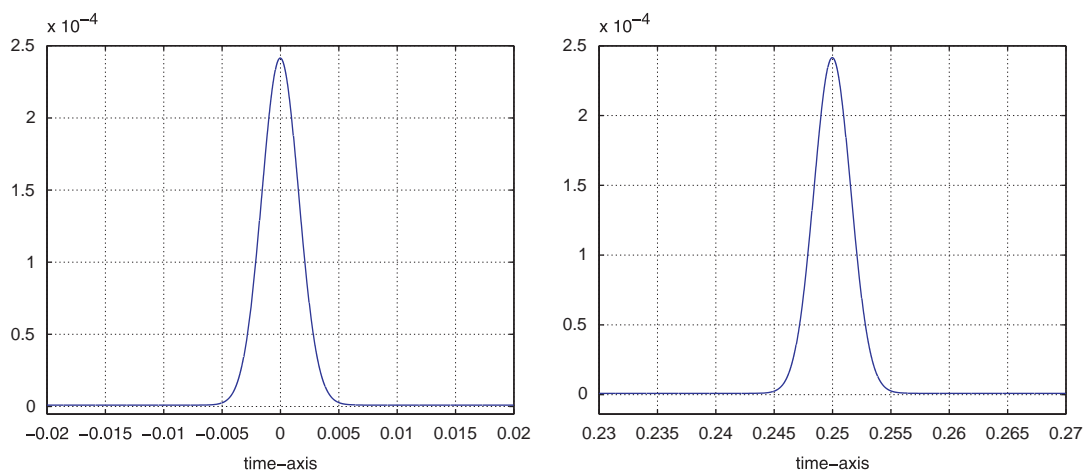
**Szabos's model:** Here  $\alpha_*(\omega)$  is as in (38). In Figure 2 we show simulations of  $\mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\beta_*)\}$ . The numerical result confirms the mathematical considerations that causality only holds for  $\gamma \in [0, 1)$ .



**Figure 1.** Simulation of  $\mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\beta_*(|\mathbf{x}|, \omega))\}$  for the frequency power law with  $(\gamma, \alpha_0) \in \{(0.5, 0.1581), (1.5, 0.0316), (2.7, 0.0071), (3.3, 0.0027)\}$ ,  $c_0 = 1$  and  $|\mathbf{x}| = \frac{1}{4}$ . In the first example  $\gamma < 1$  and thus the function is causal. For all other cases it is non-causal as predicted by the theory.



**Figure 2.** Simulation of  $\mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\beta_*(|\mathbf{x}|, \omega))\}$  for Szabo's frequency law with  $(\gamma, \alpha_0) \in \{(0.5, 0.1581), (1.5, 0.0316), (2.7, 0.0071), (3.3, 0.0027)\}$ ,  $c_0 = 1$  and  $|\mathbf{x}| = \frac{1}{4}$ .



**Figure 3.** Left:  $\mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\beta_*(|\mathbf{x}|, \omega))\}$  defined by the thermo-viscous wave equation (47) with  $\tau_0 = 10^{-5}$ ,  $c_0 = 1$  and fixed  $|\mathbf{x}| = \frac{1}{4}$ . Right: Causal variant (57) of the thermo-viscous wave equation with  $\alpha_1 = 1$ ,  $\tau_0 = 10^{-5}$ ,  $c_0 = 1$  and fixed  $|\mathbf{x}| = \frac{1}{4}$ .

*Thermo-viscous wave equation:* There  $\alpha_*$  is as in (48). The left pictures in Figure 3 shows a simulation of  $\mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\beta_*)\}$  for the thermo-viscous wave equation (47). Note that according to (48) and (55) the attenuation laws of the thermo-viscous wave equation and the causal variant (57) differ just by a multiplicative constant  $\alpha_1$ . A simulation of  $\mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\beta_*)\}$  with  $\alpha_1 = 1$  for the causal variant (57) of the thermo-viscous wave equation is shown in the right pictures of Figure 3.

## 10. Conclusions

In this paper, we introduced the concept of an operator with causal domain of influence which guarantees a finite wave front speed. As a consequence these models allow for a stable numerical implementation and thus are suitable for photoacoustic imaging, where inversion techniques are required. Based on this concept, we showed that an attenuated wave described by such an operator satisfies the standard causality condition known as the *Kramers–Kronig relation*. However, these relations are not sufficient to guarantee that an attenuated wave has a finite wave front speed. This is a common misunderstanding in causality theory.

We also showed that attenuated waves satisfying the frequency power law and the Kramers–Kronig relation have finite wave front speed only if  $\gamma \in (0, 1)$ . An example of an equation where waves can propagate with infinite wave front speed is the thermo-viscous wave equation. Because of the lack of causality of standard models in the parameter range relevant for photoacoustic imaging, we developed novel equations that satisfy our causality requirement and the desired attenuation properties.

For our causality analysis all equations were formulated as inhomogeneous equations with homogeneous initial conditions, but we showed that if certain conditions are satisfied, then the attenuation problem can be formulated as a Cauchy problem with memory.

## Appendix A: Nomenclature and elementary facts

*Real and Complex Numbers:*  $\mathbb{C}$  denotes the space of complex numbers,  $\mathbb{R}$  the space of reals. For a complex number  $c = a + ib$   $a = \Re(c)$ ,  $b = \Im(c)$  denote the real and imaginary parts, respectively.

*Differential Operators:*  $\nabla$  denotes the gradient.  $\nabla \cdot$  denotes the divergence, and  $\nabla^2$  denotes the Laplacian.

*Product:* When we write  $\cdot$  between two functions, then it means a pointwise product, it can be a scalar product or if the functions are vector valued an inner product. The product between a function and a number is not explicitly stated.

*Composition:* The composition of operators  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  is written as  $\mathcal{A}\mathcal{B}$ .

*Special functions:* The *signum* function is defined by

$$\text{sgn} := \text{sgn}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

In  $\mathbb{R}^3$  it satisfies

$$\nabla \cdot \text{sgn} = \frac{2}{|\mathbf{x}|}. \quad (\text{A1})$$

The *Heaviside* function

$$H := H(t) := \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t > 0 \end{cases}$$

satisfies

$$H := \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}).$$

The Delta-distribution is the derivative of the Heaviside function at 0 and is denoted by  $\delta_t := \delta_t(t)$ . In our terminology  $\delta_t$  denotes a *one-dimensional* distribution. The three-dimensional Delta-distribution  $\delta_{\mathbf{x}}$  is the tensor product of the three one-dimensional distributions  $\delta_{x_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Moreover,

$$\delta_{\mathbf{x},t} := \delta_{\mathbf{x},t}(\mathbf{x}, t) = \delta_{\mathbf{x}} \cdot \delta_t, \quad (\text{A2})$$

is a four-dimensional distribution in space and time.

*Properties related to functions:*  $\text{supp}(g)$  denote the *support* of the function  $g$ , that is the closure of the set of points, where  $g$  does not vanish.

*Derivative with respect to radial components:* We use the notation

$$r := r(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|,$$

and denote the derivative of a function  $f$ , which is only dependent on the radial component  $|\mathbf{x}|$ , with respect to  $r$  (i.e. with respect to  $|\mathbf{x}|$ ) by  $\cdot'$ .

Let  $\beta = \beta(r)$ , then it is also identified with the function  $\beta = \beta(|\mathbf{x}|)$  and therefore

$$\nabla \beta = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \beta'.$$

*Convolutions:* Three different types of convolutions are considered:  $*_t$  and  $*_{\omega}$  denote *convolutions* with respect to time and frequency, respectively. Let  $f, \hat{f}, g$  and  $\hat{g}$  be functions defined on the real line with complex values. Then

$$f *_t g := \int_{\mathbb{R}} f(t-t')g(t')dt', \quad \hat{f} *_\omega \hat{g} := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega-\omega')\hat{g}(\omega')d\omega'.$$

$*_{\mathbf{x},t}$  denotes space–time convolution and is defined as follows: Let  $f, g$  be functions defined on the Euclidean space  $\mathbb{R}^3$  with complex values, then

$$f *_{\mathbf{x},t} g := \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') g(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt'.$$

*Fourier transform:* For more background we refer to [19, 23, 26, 27]. Throughout this paper  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  is the Fourier Transformation with respect to  $t$ , and the inverse Fourier transform  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$  is with respect to  $\omega$ . In this paper, we use the following definition of the Fourier transform  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  and its inverse  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(i\omega t) f(t) dt, \quad \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\omega t) \hat{f}(\omega) d\omega.$$

The Fourier transform and its inverse have the following properties:

1.  $\mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial t} f\right\}(\omega) = (-i\omega) \mathcal{F}\{f\}(\omega).$
2.  $\mathcal{F}\{f \cdot g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{f\} *_{\omega} \mathcal{F}\{g\}$  and  $\mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{f *_{\omega} g\},$   
 $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f} \cdot \hat{g}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} *_{\omega} \mathcal{F}^{-1}\{\hat{g}\}$  and  $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} \cdot \mathcal{F}^{-1}\{\hat{g}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f} *_{\omega} \hat{g}\}.$

3. For  $a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) = \exp(-ia\omega) \cdot \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$$

4. The Delta-distribution at  $a \in \mathbb{R}$  satisfies

$$\delta_t(t-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{\exp(ia\omega)\}(t).$$

5. Let  $f$  be real and even, odd, respectively, then  $\mathcal{F}\{f\}$  is real and even, imaginary and odd, respectively.

The Hilbert transform for  $L^2$ -functions is defined by

$$\mathcal{H}\{f\}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{t-s} ds,$$

where  $\int_{\mathbb{R}} f(s) ds$  denotes the Cauchy principal value of  $\int_{\mathbb{R}} f(s) ds$ .

A more general definition of the Hilbert transform can be found in [28]. The Hilbert transform satisfies

- $\mathcal{H}\{\mathcal{F}\{f\}\}(\omega) = -i \mathcal{F}\{\operatorname{sgn} f\}(\omega),$
- $\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{f\}\} = -f.$

From the first of these properties the Kramers–Kronig relation can be formally derived as follows. Since  $f(t)$  is a causal function if and only if  $f = H \cdot f$  and  $H = (1 + \operatorname{sgn})/2$ , it follows that  $\mathcal{F}\{f\} = [\mathcal{F}\{f\} + i \mathcal{H}\{\mathcal{F}\{f\}\}]/2$ , which is equivalent to  $\mathcal{F}\{f\} = i \mathcal{H}\{\mathcal{F}\{f\}\}$ , i.e.

$$\Re(\mathcal{F}\{f\}) = -\Im(\mathcal{H}\{\mathcal{F}\{f\}\}) \quad \text{and} \quad \Im(\mathcal{F}\{f\}) = \Re(\mathcal{H}\{\mathcal{F}\{f\}\}).$$

The inverse Laplace transform of  $f$  is defined by

$$\mathcal{L}^{-1}\{f\}(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(st) f(s) ds & \text{for } t > 0, \end{cases}$$

where  $\gamma$  is appropriately chosen.

The inverse Laplace transform satisfies (see e.g. [29]) that

$$\mathcal{L}^{-1}\{h(s-a)\}(t) = \exp(at) \mathcal{L}^{-1}\{h(s)\}(t) \quad \text{for all } a, t \in \mathbb{R} \quad (\text{A3})$$

and

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^{-r}\}(t) = \frac{H(t)t^{r-1}}{\Gamma(r)} \quad (r > 0). \quad (\text{A4})$$



## Acknowledgements

This work has been supported by the Austrian Science Fund (FWF) within the national research network Photoacoustic Imaging in Biology and Medicine, project S10505-N20. The stay of XB in Innsbruck was partly supported by the 'Frankreich-Schwerpunkt' of the University of Innsbruck.

## References

1. Tam AC. Applications of photoacoustic sensing techniques. *Reviews of Modern Physics* 1986; **58**(2):381–431.
2. Ku G, Wang X, Stoica G, Wang LV. Multiple-bandwidth photoacoustic tomography. *Physics in Medicine and Biology* 2004; **49**:1329–1338.
3. Xu M, Wang LV. Photoacoustic imaging in biomedicine. *Review of Scientific Instruments* 2006; **77**(4):1–22. Article ID: 041101.
4. Patch SK, Scherzer O. Special section on photo- and thermoacoustic imaging. *Inverse Problems* 2007; **23**:S1–S122.
5. Wang LV. Prospects of photoacoustic tomography. *Medical Physics* 2008; **35**(12):5758–5767.
6. Ammari H, Bossy E, Jugnon V. Mathematical modelling in photo-acoustic imaging. *SIAM Review*; in press.
7. Kuchment P, Kunyansky LA. Mathematics of thermoacoustic and photoacoustic tomography. *European Journal of Applied Mathematics* 2008; **19**:191–224.
8. Patch SK, Greenleaf A. Equations governing waves with attenuation according to power law. *Technical Report*, Department of Physics, University of Wisconsin-Milwaukee, 2006.
9. La Rivière PJ, Zhang J, Anastasio MA. Image reconstruction in optoacoustic tomography for dispersive acoustic media. *Optics Letters* 2006; **31**(6):781–783.
10. Burgholzer P, Grün H, Haltmeier M, Nuster R, Paltauf G. Compensation of acoustic attenuation for high-resolution photoacoustic imaging with line detectors. *SPIE*, vol. 6437. 2007; 643724.
11. Hristova Y, Kuchment P, Nguyen L. Reconstruction and time reversal in thermoacoustic tomography in acoustically homogeneous and inhomogeneous media. *Inverse Problems* 2008; **24**(5):25. 055006.
12. Rossing TDE (ed.). *Springer Handbook of Acoustics*. Springer: New York, 2007.
13. Szabo TL. Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law. *Journal of the Acoustical Society of America* 1994; **96**:491–500.
14. Szabo TL. Causal theories and data for acoustic attenuation obeying a frequency power law. *Journal of the Acoustical Society of America* 1995; **97**:14–24.
15. Sushilov NV, Cobbold CRS. Frequency-domain wave equation and its time-domain solution in attenuating media. *Journal of the Acoustical Society of America* 2005; **115**:1431–1436.
16. Waters KR, Hughes MS, Brandenburger GH, Miller JG. On a time-domain representation of the Kramers–Krönig dispersion relation. *Journal of the Acoustical Society of America* 2000; **108**(5):2114–2119.
17. Kinsler LE, Frey AR, Coppens AB, Sanders JV. *Fundamentals of Acoustics*. Wiley: New York, 2000.
18. Burgholzer P, Roitner H, Bauer-Marschallinger J, Paltauf G. Image reconstruction in photoacoustic tomography using integrating detectors accounting for frequency-dependent attenuation. *Proceedings of SPIE*, vol. 7564. 2010; 756400.
19. Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I* (2nd edn). Springer: New York, 2003.
20. Webb S (ed.). *The Physics of Medical Imaging*. Institute of Physics Publishing: Bristol, PA, 2000. Reprint of the 1988 edition.
21. Courant R, Friedrichs K, Lewy H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development* 1967; **11**:215–234.
22. Nachman AI, Smith JF III, Waag RC. An equation for acoustic propagation in inhomogeneous media with relaxation losses. *Journal of the Acoustical Society of America* 1990; **88**(3):1584–1595.
23. Papoulis A. *The Fourier Integral and its Applications*. McGraw-Hill: New York, 1962.
24. Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Elsevier Science B.V.: Amsterdam, 2006.
25. Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. Academic Press Inc: San Diego, CA, 1999.
26. Lighthill MJ. *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions* (Student's Edition). Cambridge University Press: London, 1964.
27. Titchmarsh EC. *Theory of Fourier Integrals*. Clarendon Press: Oxford, 1948.
28. Beltrami EJ, Wohlers MR. *Distributions and the Boundary Values of Analytic Functions*. Academic Press: New York, London, 1966.
29. Heuser H. *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (2nd edn). Teubner: Stuttgart, 1991.



## Chapitre 7

# Utilisation du "Back and Forth Nudging"

### Présentation

Outre les approximations nécessaires pour les étendre à des situations de données incomplètes [91, 18, 50], les procédures d'inversion du chapitre 3 deviennent impraticables si l'on souhaite considérer une vitesse de propagation de l'onde de pression non constante, ou encore prendre en compte l'atténuation subie par cette dernière lors de sa progression (voir le chapitre 6 et la référence [16]). En effet, si les mesures ne sont plus considérées comme provenant d'une solution de l'équation des ondes classique, il n'est plus possible de ramener le problème inverse de la TTA à l'inversion de la transformée de Radon sphérique, ni d'utiliser les fonctions de Green de l'équation de Helmholtz, pas plus que de relier les transformées de Fourier de l'objet et des données (à moins d'augmenter considérablement la complexité des calculs).

Or la nature même du problème inverse de la TTA suggérait d'utiliser des méthodes issues de *l'assimilation de données*, une branche des mathématiques visant à utiliser les mesures disponibles afin de corriger un état (par exemple l'état initial) d'un système gouverné par une équation d'évolution. En effet il s'agit bien ici de corriger l'état initial (quitte à en faire une première ébauche nulle) d'un système gouverné par une équation des ondes, éventuellement atténuée et à vitesse du son non constante, que l'on observe

le long d'une surface  $\mathcal{S}$ . Il s'agit ici de partir d'une première ébauche de cet état initial (le système au temps  $t = 0$ ), de le faire évoluer jusqu'à un temps  $T$ , puis de le faire évoluer en temps rétrograde jusqu'au temps  $t = 0$  en intégrant un terme de rappel aux données le long de  $\mathcal{S}$ .

Supposons donc que l'on cherche à reconstruire l'état initial, à support compact dans  $B(0, 1 - \varepsilon)$ ,  $f_0 := p_{\text{exact}}(\cdot, 0)$  d'une solution de l'équation des ondes notée  $p_{\text{exact}}$ , connue pour tout temps, seulement sur une hypersurface  $\mathcal{S}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} Lp_{\text{exact}} = 0, \\ p_{\text{exact}}(x, 0) = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p_{\text{exact}}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ p_{\text{data}}(x, t) := p_{\text{exact}}(x, t), \quad x \in \mathcal{S}, t \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right.$$

Ici l'on a noté  $L$  l'opérateur gouvernant la propagation de l'onde, éventuellement atténuée. Pour les besoins de la procédure, supposons que  $p_{\text{data}}$  est connu sur le support, de mesure non nulle, d'une application  $C^\infty$  notée  $\phi$ ; ceci est justifié par le processus de discrétisation dans la reconstruction de l'image  $f_0$ . Dès lors, l'algorithme du *Back and Forth Nudging* (BFN) peut être décrit comme suit :

Étape 1 : Partant d'une ébauche  $f_{0,1}$  de l'objet à reconstruire  $f_0$ , on calcule la solution  $p_1$  du problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lp_1 = 0, \\ p_1(x, 0) = f_{0,1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p_1(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right.$$

jusqu'à un temps  $T$  permettant à  $p_1(\cdot, t)$  d'être nulle sur  $B(0, 1)$  pour tout temps  $t \geq T$ .

Étape 2 : Partant de  $p_1(\cdot, T)$  et fixant un paramètre de nudging  $k$ , on calcule la solution  $\tilde{p}_1$  du même problème de Cauchy, mais en temps rétrograde et avec un terme de rappel aux données newtonien :

$$\left\{ \begin{array}{l} L\tilde{p}_1 = k\phi(\tilde{p}_1 - p_{\text{data}}), \\ \tilde{p}_1(x, T) = p_1(x, T), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t \tilde{p}_1(x, T) = -\partial_t p_1(x, T), \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right.$$

jusqu'au temps  $t = 0$ . Comme nous le verrons dans le résultat de convergence, ce terme de rappel est choisi pour faire décroître l'énergie de l'erreur  $\tilde{p}_1 - p_{\text{data}}$ .

Étape 3 : Finalement, on met à jour l'estimée  $f_{0,1}$  en définissant la nouvelle ébauche :

$$f_{0,2} := \mathbb{1}_{B(0, 1 - \varepsilon)} \tilde{p}_1(\cdot, 0),$$

qui est choisie à support dans  $B(0, 1 - \varepsilon)$ , comme l'objet  $f_0$ , afin de pouvoir itérer le procédé. On revient à l'étape 1.

L'itération de ce procédé permet la construction d'une suite d'ébauches  $(f_{0,n})$  convergeant géométriquement vers  $f_0$ .

**Théorème 7.0.2.** *Dans le cas de l'équation des ondes classique, lorsque la surface d'observation est la sphère  $S(0, 1)$  et que l'objet  $f_0$  est de classe  $C^\infty$ , il existe une constante  $0 < s < 1$ , ne dépendant que de  $f_0$ ,  $\phi$  et  $k$ , telle que :*

$$\|f_{0,2} - f_0\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)} < s \|f_{0,1} - f_0\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Bien que, en l'état, la preuve de la convergence ne soit valable que sous des restrictions relativement fortes, il est à noter que la plupart des résultats de convergence des techniques de nudging nécessitent habituellement la connaissance des données sur l'espace entier, ou bien reposent sur une condition d'observabilité difficile à vérifier dès la dimension infinie (avant discrétisation). En outre, le taux de convergence obtenu ici, bien que relativement faible en théorie ( $s$  est proche de 1), tient compte des situations les moins favorables (par exemple où le défaut d'injectivité perturbe la reconstruction) et les résultats numériques de l'article exhibent une convergence bien plus acceptable.

Le travail qui suit a été soumis pour publication dans le journal *Inverse Problems* en octobre 2010. Il est à considérer comme une première étape dans l'introduction d'une telle technique dans le domaine de la TTA. Par ailleurs, la mise en œuvre numérique du BFN montre que celui-ci est efficace dans le cas de données partielles bruitées. Les premiers essais concernant une équation des ondes atténuée, bien que non aboutis, se révèlent prometteurs.

# Application of a nudging technique to thermoacoustic tomography

**X Bonnefond and S Marinesque**

Institut de Mathématiques de Toulouse  
Université Paul Sabatier  
118 route de Narbonne  
31062 Toulouse cedex 9

E-mail: [xavier.bonnefond@math.univ-toulouse.fr](mailto:xavier.bonnefond@math.univ-toulouse.fr),  
[sebastien.marinesque@math.univ-toulouse.fr](mailto:sebastien.marinesque@math.univ-toulouse.fr)

**Abstract.** ThermoAcoustic Tomography (TAT) is a promising, non invasive, medical imaging technique whose inverse problem can be formulated as an initial condition reconstruction. In this paper, we introduce a new algorithm originally designed to correct the state of an evolution model, the *back and forth nudging* (BFN), for the TAT inverse problem. We show that the flexibility of this algorithm enables to consider a quite general framework for TAT. The backward nudging algorithm is studied and a proof of the geometrical convergence rate of the BFN is given. Finally, numerical experiments validate the theoretical results with a better convergence rate for more realistic setups and a comparison is established between BFN and a usual variational method.

AMS classification scheme numbers: 35L15, 35R30, 65M32, 92-04, 92C55, 93D15

## 1. Introduction

ThermoAcoustic Tomography (TAT) is a hybrid imaging technique that uses ultrasound waves produced by a body submitted to a radiofrequency pulse, uniformly deposited throughout the body. The absorption of this initial energy causes a non-uniform thermal expansion, leading to the propagation of a pressure wave outside the body to investigate. This wave is then measured all around the body with piezoelectric transducers or, more recently, thanks to interferometry techniques.

It appears that the absorption of the initial pulse is highly related to the physiological properties of the tissue [1]. As a result, the magnitude of the ultrasonic emission (*i.e.* thermoacoustic signal), which is proportional to the local energy deposition, reveals physiologically specific absorption contrast. See [2, 3, 4] for an introduction on the experimental setup. Considering that the initial illumination is a Dirac distribution in time, the problem of recovering the absorptivity of the investigated body from the thermoacoustic signal is equivalent to recovering the initial condition of a Cauchy problem involving the wave equation from the knowledge of the solution on a surface surrounding the imaging object [5]. Note that the experimental constraints do not allow the acquisition surface to completely surround the tissues to investigate, so that one cannot expect a better situation than measurements on a half-sphere (as in breast cancer detection for example).

Many works dealing with TAT (also called *optoacoustic* or *photoacoustic* tomography) have been achieved during the last decade (see [6] for a brilliant overview), and the methods used in these papers strongly depend on a set of additional assumptions, among which:

- the *homogeneity of the tissues*, leading to a constant speed of sound for the pressure wave;
- the *lack of frequency-dependent attenuation*, so that the pressure wave obeys the classical, undamped, wave equation;
- the *complete data situation*, where the acquisition surface is considered to enclose the whole body.

The study of TAT in the case of an homogeneous medium without attenuation gave rise to explicit inversion formulas. These latter usually require that the acquisition set is a closed surface, even if they can be approximated in the *limited view* situation (where the surface is a half-sphere for example). Among these, filtered backprojection formulas seem to be affected by computational issues (see [7, 8]), while Fourier's type formulas, which offer a much better numerical efficiency, apply on very specific geometries (see [9, 10, 11]) or imply some additional approximations, like an interpolation from spherical to cartesian coordinates [12, 13, 14, 15, 16, 17]. Even though some of these techniques give rise to very efficient reconstruction schemes (especially [11]), so far it is not clear if they can extend to less restrictive acquisition geometries or to an attenuated wave with non constant speed (see [18] for a promising attempt).

Thanks to the relation between solutions of the classical wave equation and spherical means [19], this situation (constant speed, no attenuation) allows the use of variational methods. A regularization scheme is proposed in [20], based on the *approximate inverse* (see [21] and [8] for direct applications of this concept), which remains stable in the limited view situation. Yet, any attempt to weaken the assumptions would certainly face serious technical difficulties.

Finally, in [22], Hristova *et al* applied the *time reversal* method to TAT. This particular reconstruction scheme would apply, with some assumptions on the decay of the solution, to quite general wave equations, nevertheless it requires the knowledge of the pressure wave on a closed surface surrounding the whole body, which cannot be achieved in practice.

In this paper, we show that the framework of TAT lends itself to the application of some *data assimilation* techniques. These latter, mainly used in geophysics, aim at correcting the state of an evolutionary model by means of data, in order to obtain a good approximation of the real state (see [23] for an introduction). The particular data assimilation method proposed here is based on a *nudging* technique: given an evolution model of the state and direct observation (our data), it consists in adding, inside the model equation, a newtonian recall of the state solution to the observations (or data), which is usually called the recall, feedback or nudging term [24]. As we shall see, this method can be successfully used to manage the usual issues of the TAT inverse problem as incomplete data, damping, external source and variable sound speed (when given, however).

Different forms of nudging terms can be found in the literature, and most of them have been used to assimilate data in physical oceanography as in [25], [26], [27] and more recently in [28]. Fundamental articles offer the basis of most popular techniques as Kalman filter [29], Kalman-Bucy filter [30] and Luenberger observer [31].

Since the basic nudging method showed its limits in real conditions by using the data once, Auroux and Blum proposed to extend the method by adding a resolution backward in time and iterating the process, thus defining the *back and forth nudging* (BFN) algorithm. They presented it in [32], [33] and [24], and implemented this method with computationally efficient results in comparison with traditional data assimilation methods, like optimal filters (from extended Kalman's to particle filters) or other optimal minimization techniques (variational methods), which appear costfull respectively in memory needs and computing time – see the brief introductions of Talagrand in [23], [34] and [35] for further details about data assimilation and a relevant bibliography.

In Section 2.1, we introduce the TAT inverse problem in a quite general form, i.e. without the use of the usual assumptions. Secondly, in Section 2.4, we describe the BFN algorithm and we state the main result of this article: the convergence Theorem 3. Then Section 3 is devoted to the proof of this result. Finally, we give numerical results in Section 4.

### Notation

In the following, we shall use this notation:

- The open ball with center  $x \in \mathbb{R}^3$  and radius  $r > 0$  will be denoted by  $B(x, r)$ ;
- Its boundary will be noted  $S(x, r)$ ;
- For every  $x \in \mathbb{R}^3$  and  $r_1, r_2 > 0$ :

$$A(x, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid r_1 < \|x - y\| < r_2\},$$

and:

$$A(r_1, r_2) = A(0, r_1, r_2).$$

Moreover, for any set  $S$  of  $\mathbb{R}^3$ :

$$T(S, r_1) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in S, \|y - x\| < r_1\}.$$

## 2. Presentation of the method

### 2.1. The general TAT problem

In the following, we will denote by  $p_{\text{exact}}(x, t)$  the pressure wave resulting from the thermal expansion of the body. We will make the assumption that the measurement process of this pressure is subject to some perturbation  $p_{\text{noise}}$ , such that the actual data can be written  $p_{\text{data}} := p_{\text{exact}} + p_{\text{noise}}$ . In thermoacoustic tomography, the data are nothing but  $\{p_{\text{data}}(x, t) \mid x \in \mathcal{S}\}$ , where  $\mathcal{S}$  is a surface surrounding the body to investigate. The pressure  $p_{\text{exact}}$  satisfies the Cauchy problem (see [5] for a detailed calculation):

$$\begin{cases} Lp_{\text{exact}}(x, t) = E_{\text{dep}}(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [-1, \infty), \\ p_{\text{exact}}(x, -1) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p_{\text{exact}}(x, -1) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where  $L$  is the differential operator governing the wave, most likely the wave operator, or a damped wave operator, and  $E_{\text{dep}}$  is the energy deposited in the body around the



time  $t = 0$  (so we have to consider a negative initial time, e.g.  $t = -1$ ). This energy can be written:

$$E_{dep} = e(x) \frac{dj}{dt}(t),$$

$$e(x) := \frac{\beta c}{c_p} I_{em}(x) \Psi(x),$$

where  $e$  is called the *normalized energy deposition function*. Here  $\beta$  is the *thermal expansion coefficient*,  $c_p$  is the *specific heat capacity*,  $c$  the sound speed and  $I_{em}$  is the *radiation intensity* of the initial energy pulse. All these parameters, including the time shape  $j$  of the pulse, are known and we see that the knowledge of  $E_{dep}$  is sufficient to compute the absorption density  $\Psi$  inside the body, which is our purpose.

So far, the general thermoacoustic problem can be formulated in the following way:

Let  $p_{\text{exact}}(x, t)$  be solution of:

$$\begin{cases} Lp_{\text{exact}}(x, t) = f_0(x) \frac{dj}{dt}(t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [-1, \infty), \\ p_{\text{exact}}(x, -1) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p_{\text{exact}}(x, -1) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (1)$$

where  $j$  is known and  $f_0$  is the object to reconstruct, with compact support in the unit ball  $B(0, 1)$ . Can we compute  $f_0$ , or a good approximation of  $f_0$ , from the knowledge of  $p_{\text{data}} = p_{\text{exact}} + p_{\text{noise}}$  on a surface  $\mathcal{S}$  surrounding  $B(0, 1)$  ?

## 2.2. Reduction to the homogeneous case

As we have seen, even though it is not possible in practice, the initial energy deposition is meant to be a Dirac pulse in time at  $t = 0$ , that is  $\frac{dj}{dt} = \delta'_0$ . Let  $q_0$  be solution, which is no longer to be considered for negative time values, where it is the null solution, of the Cauchy problem:

$$\begin{cases} Lq_0(x, t) = f_0(x) \delta'_0(t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ q_0(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t q_0(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

which is equivalent to:

$$\begin{cases} Lq_0(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ q_0(x, 0) = f_0(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t q_0(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (2)$$

according to Duhamel's principle (see [19]), provided that  $L$  is a (damped) wave operator. Then  $p_{\text{data}}$  is solution of (1) if and only if  $p_{\text{data}} = j *_t q_0$ , which means that a deconvolution operation on the thermoacoustic signal  $p_{\text{exact}}$  leads to the knowledge of the solution  $q_0$  of (2) on the same surface  $\mathcal{S}$  surrounding the object.

In the following, we will still denote by  $p_{\text{exact}}$  the solution of (2), assuming that we know this latter for all  $x$  in  $\mathcal{S}$ , and all  $t$  in  $\mathbb{R}_+$ .

### 2.3. Some useful facts about the standard wave equation

In this section we give some basic properties of the following wave equation:

$$\begin{cases} L_0 u(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = l(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t u(x, 0) = h(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (3)$$

where  $l$  and  $h$  are two  $C^\infty$  functions with compact support in  $B(0, 1)$ , and  $L_0 := \partial_{tt} - \Delta$ . All this material can be found in [36] for example. According to Huyghens' principle in the strong sense, for every couple  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ , the classical solution  $u(x_0, t_0)$  of (3) only depends on the values of  $l$  and  $h$  on the backward characteristic cone:

$$\|x - x_0\| = |t - t_0|.$$

As a matter of fact, when the initial conditions  $l$  and  $h$  have their support in  $B(0, 1)$ , the solution at any time  $\tilde{t}$  has its support in  $B(0, 1 + \tilde{t})$ .

Huyghens' principle leads to the energy conservation for the solution  $u$  of (3).

**Definition 1.** For every time  $T$ , we call *energy* of  $u$  the quantity:

$$E_u(T) := \frac{1}{2} \left( \|u(\cdot, T)\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\partial_t u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right).$$

The variation of the energy of  $u$  is estimated from the following identity:

$$\partial_t u (\partial_{tt} u - \Delta u) = 0 = \partial_t \left[ \frac{\|\nabla u\|^2}{2} + \frac{(\partial_t u)^2}{2} \right] - \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} (\partial_t u \partial_{x_i} u).$$

Since  $u$  has a compact support, integrating for  $0 < t < T$  and over the whole space yields:

$$E_u(T) = E_u(0).$$

Note that if  $h$  is zero, we have:

$$E_u(0) = \frac{1}{2} \|l\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}^2.$$

### 2.4. Nudging

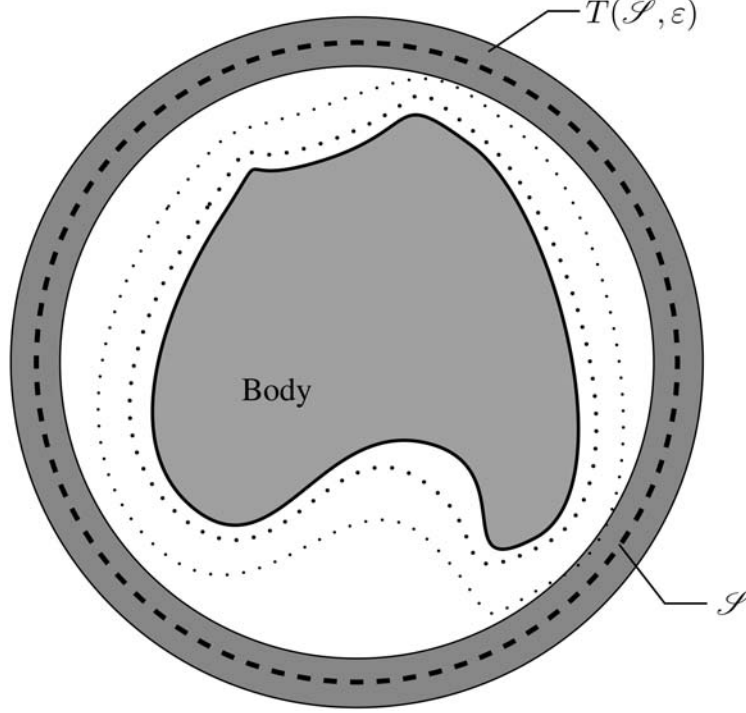
Now, let us introduce the application of the BFN algorithm to the general TAT problem.

Assume that the observation surface  $\mathcal{S}$  is included in the sphere  $S(0, 1)$ . As exposed in Section 2.1, our purpose is to compute an approximation of the original object  $f_0$  from an incomplete set of data  $\phi p_{\text{data}}$ , where  $p_{\text{data}}$  is a the solution (possibly contaminated by noise) of the wave equation (2) and where  $\phi$  allows the knowledge of  $p_{\text{data}}$  only on the observation surface  $\mathcal{S}$ . Theoretically speaking,  $\phi$  should be  $\mathbf{1}_{\mathcal{S}}$ , but in practice the discretization process allows us to choose a  $C^\infty$  function with compact support. Indeed, given a resolution, there exists  $\varepsilon > 0$  such that any function supported in  $T(\mathcal{S}, \varepsilon)$  and equal to 1 on  $\mathcal{S}$  has the same discrete counterpart as  $\mathbf{1}_{\mathcal{S}}$  (see Figure 1). This is the reason why we will make the following assumptions on  $\phi$ :

- i  $\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad 0 \leq \phi(x) \leq 1$ ;
- ii  $\phi$  has a compact support in  $T(\mathcal{S}, \varepsilon)$ ;

iii  $\forall x \in T(\mathcal{S}, \varepsilon/2), \quad \phi(x) = 1.$

Finally, in order to avoid some technical difficulties, we will assume that the initial object  $f_0$  has his support in  $B(0, 1 - \varepsilon)$  and is such that every Cauchy problem we shall consider has a classical solution, say  $C^\infty$ .



**Figure 1.** The body to investigate is surrounded by the acquisition surface  $\mathcal{S}$ , and generates a pressure wave.

We may proceed as follows:

**Definition 2** (Iterate of the BFN algorithm for TAT).

*i* [Forward evolution]

From an rough estimate  $f_{0,1}$  of the object to reconstruct  $f_0$ , defined as an approximate of the initial condition supported in  $B(0, 1 - \varepsilon)$ , we first consider a solution  $p_1$  of Problem (3) with initial conditions  $l = f_{0,1}$  and  $h = 0$  (as usual in TAT).

We compute this solution untill time  $T = 2$ , chosen so that both  $p_1(\cdot, t)$  and  $p_{\text{exact}}(\cdot, t)$  (just as every function with compact support in the ball  $B(0, 1 - \varepsilon)$ ) vanish on  $B(0, 1 + \varepsilon)$  for all  $t \geq T$  (cf Huyghens' principle in Section 2.3).

Thus at this final time, in the noise-free situation, the innovation term  $p_1 - p_{\text{data}}$ , defined as the difference between the solution  $p_1$  of Problem (3) and the data, is still a solution of (3) with  $l = f_{0,1} - f_0$  and  $h = 0$  and has an energy matching up to:

$$E_{p_1 - p_{\text{data}}}(T) = E_{p_1 - p_{\text{data}}}(0) = \frac{1}{2} \|\nabla(f_0 - f_{0,1})\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}^2,$$

since the conservation of energy for the wave equation holds in this situation.

ii [Backward evolution]

Then we apply the backward nudging method to make the solution evolve back in time, with, as announced, the addition in the backward equation of a newtonian feedback, which adjusts the solution along its evolution by recalling it to the observed data.

Namely, we add to  $L$  the feedback correction term  $k\phi\partial_t(\cdot - p_{\text{data}})$ , for some nudging parameter  $k \in \mathbb{R}_+$ . And we compute the backward solution starting from the final state of the forward implementation, i.e.  $p_1(x, T)$  and  $\partial_t p_1(x, T)$ , untill the initial time  $t = 0$ .

We obtain a corrected solution  $\tilde{p}_1$  of the Cauchy problem, called backward nudging problem:

$$\begin{cases} \tilde{L}\tilde{p}_1(x, t) = k\phi(x)\partial_t(\tilde{p}_1 - p_{\text{data}})(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ \tilde{p}_1(x, T) = p_1(x, T), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t \tilde{p}_1(x, T) = \partial_t p_1(x, T), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

In order to obtain an equation in forward time, let us consider the map  $t \mapsto \tilde{p}_1(T - t)$ , still denoted by  $\tilde{p}_1$ . The Cauchy problem becomes:

$$\begin{cases} \tilde{L}\tilde{p}_1 = -k\phi(x)\partial_t(\tilde{p}_1 + p_{\text{data}})(x, T - t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ \tilde{p}_1(x, 0) = p_1(x, T), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t \tilde{p}_1(x, 0) = -\partial_t p_1(x, T), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where  $\tilde{L}$  is the operator  $L$  backwards in time.

Obviously, in practice, when  $L$  is not the wave operator, there is no reason for this operator to be reversible. Nevertheless the newtonian feedback may act as a regularization term and keep the computation stable.

iii [Update of the estimate]

Finally, after this back and forth evolution, a new estimate  $\tilde{p}_1(T)$  is obtained, but in order to iterate the process we need the new estimate to be supported in  $B(0, 1 - \varepsilon)$ , just like  $f_0$  and  $f_{0,1}$ . This is simply done by defining:

$$f_{0,2}(x) := \mathbb{1}_{B(0, 1 - \varepsilon)} \tilde{p}_1(x, T), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

The last step can be easily justified by the fact that, since  $f_0$  is supported in  $B(0, 1 - \varepsilon)$ :

$$\|f_0 - \tilde{p}_1(\cdot, T)\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)} \geq \|f_0 - \mathbb{1}_{B(0, 1 - \varepsilon)} \tilde{p}_1(\cdot, T)\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}.$$

This scheme is then iterated, constructing a sequence of estimates  $(f_{0,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ , which may converge to  $f_0$ . The following theorem, proved in Section 3, ensures that the convergence is geometrical in  $H_0^1(\mathbb{R}^3)$  under the assumptions:

- (i)  $L$  is the standard wave operator  $\partial_{tt} - \Delta$ ;
- (ii) The data is noise-free, i.e.  $p_{\text{data}} = p_{\text{exact}}$  (see Section 2.1), and the observation surface  $\mathcal{S}$  is the whole sphere  $S(0, 1)$ ;
- (iii) The object to reconstruct  $f_0$  is a  $C^\infty$  function with compact support in  $B(0, 1)$ ;
- (iv)  $f_{0,1}$  and  $f_{0,2}$  are two consecutive estimates of  $f_0$  obtained as described in Definition 2.

**Theorem 3.** Under the assumptions (i)-(iv), there exists  $1 > s > 0$  only depending on  $f_0$ ,  $\phi$  and the nudging parameter  $k \geq 0$  such that:

$$\|f_0 - f_{0,2}\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)} \leq s \|f_0 - f_{0,1}\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}. \quad (4)$$

We only consider this ideal framework for the sake of the proof, but numerical results given in Section 4 apply with more realistic assumptions and show a better convergence rate.

### 3. Proof of Theorem 3

This section is devoted to the proof of Theorem 3. We study the case where  $L = L_0 := \partial_{tt} - \Delta$  is the standard wave operator. Let  $\phi$ ,  $f_0$  and  $p_{\text{data}}$  be as in Theorem 3. In particular, for the sake of the proof, we make the assumptions that the data is noise-free and that, since  $\mathcal{S} = S(0, 1)$ , the set  $T(\mathcal{S}, \varepsilon/2)$  is equal to  $A(1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2)$ . We shall use the notation:

$$L_k := \partial_{tt} - \Delta + k\phi\partial_t, \quad k \in \mathbb{R}_+.$$

We first study the existence of the objects used in the BFN approximation scheme.

#### 3.1. Solution of the backward nudging equation

The proof of the following theorem can be found in [37], Chapter 2.8.

**Theorem 4.** Given three  $C^\infty$  functions  $\phi$ ,  $l$  and  $h$  with compact support and  $k \in \mathbb{R}_+$ ,  $T > 0$  there exists a unique  $C^\infty$  solution  $p$  of the Cauchy problem:

$$\begin{cases} L_k p(x, t) = -k\phi(x)\partial_t p_{\text{data}}(x, T - t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ p(x, 0) = l(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p(x, 0) = h(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (5)$$

Moreover, for every  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ ,  $p(x_0, t_0)$  only depends on the values of  $l$ ,  $h$ ,  $\phi$  and  $p_{\text{data}}(\cdot, T - \cdot)$  in the backward characteristic cone:

$$\|x - x_0\| \leq |t - t_0|.$$

In particular, this means that for every sketch  $f_{0,1}$  with compact support and of class  $C^\infty$ , the solution  $\tilde{p}_1$  of the backward nudging equation (5) exists, and for all  $t \in [0, T]$  the function  $\tilde{p}_1(\cdot, t)$  has a compact support. This property will be helpful to apply an energy method.

Now, it is easy to show that if  $\tilde{p}_1$  is solution of (5) with initial conditions  $l(x) = \tilde{p}_1(x, 0) = p_1(x, T)$  and  $h(x) = \partial_t \tilde{p}_1(x, 0) = -\partial_t p_1(x, T)$ , then the function  $u := \tilde{p}_1 - p_{\text{data}}(\cdot, T - \cdot)$  is solution of the Cauchy problem:

$$\begin{cases} L_k u(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ u(x, 0) = p_1(x, T) - p_{\text{data}}(x, T), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t u(x, 0) = -\partial_t (p_1 - p_{\text{data}})(x, T), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (6)$$

and satisfies:

$$E_u(0) = E_{p_1 - p_{\text{data}}}(T) = \frac{1}{2} \|f_{0,1} - f_0\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Since, from the definition of  $f_{0,2}$ :

$$E_u(T) \geq \frac{1}{2} \|\tilde{p}_1(\cdot, T) - f_0\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{2} \|f_{0,2} - f_0\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2,$$

we only need to prove that:

$$E_u(T) \leq sE_u(0), \quad \text{for some } 0 < s < 1,$$

to complete the proof of Theorem 3. This is the purpose of the next section.

### 3.2. Energy inequality

We have the following identity for every solution  $u$  of (5):

$$\partial_t u L_k u = 0 = \partial_t \left[ \frac{\|\nabla u\|^2}{2} + \frac{(\partial_t u)^2}{2} \right] + k\phi(\partial_t u)^2 - \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}(\partial_t u \partial_{x_i} u).$$

Recall that  $u$  has a compact support for every  $t$ , thus, integrating the latter equality over the whole space and for  $0 < t < T$ , we get:

$$E_u(T) - E_u(0) = -k \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\partial_t u)^2. \quad (7)$$

Consequently, the loss of energy of  $u$  is exactly the amount of its 'energy' passing through the support of  $\phi$  during time  $T$ .

In [7], in order to invert the spherical Radon transform, Finch *et al* proved the following *trace identity*, which will be useful to estimate (7):

**Theorem 5.** Suppose  $h_i \in C_0^\infty(B(0, \rho))$  and  $u_i$  is the solution of (3) for  $l = 0$  and  $h = h_i$ ,  $i = 1, 2$ . Then we have the identity

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} h_1 h_2 = \frac{-1}{\rho} \int_0^\infty \int_{S(0, \rho)} t u_1 \partial_{tt} u_2.$$

From this we will obtain a key estimate of the 'energy' passing through the sphere  $S(0, \rho)$ . Indeed, if  $u$  is solution of (3) with  $h = 0$ , taking  $h_1 = f$  and  $h_2 = \Delta f$  in the theorem yields:

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} f \Delta f = \frac{-1}{\rho} \int_0^\infty \int_{S(0, \rho)} t (\partial_t u)^2,$$

which gives:

$$\frac{1}{2} \|f\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}^2 = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \int_{S(0, \rho)} t (\partial_t u)^2. \quad (8)$$

Let us introduce the solution  $u_0$  of the Cauchy problem:

$$\begin{cases} L_0 u_0(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ u_0(x, 0) = p_1(x, T) - p_{\text{data}}(x, T), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_{0t}(x, 0) = -\partial_t p_1(x, T) + \partial_t p_{\text{data}}(x, 0), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

which is nothing but  $(p_1 - p_{\text{data}})(\cdot, T - \cdot)$ . Then  $u = u_0 + v$  where  $v$  is solution of:

$$\begin{cases} L_0 v(x, t) = -k\phi\partial_t(u_0 + v)(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ v(x, 0) = \partial_t v(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

The calculation of the energy of  $v$  yields:

$$E_v(T) = -k \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi \partial_t u_0 \partial_t v - k \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi (\partial_t v)^2.$$

Thanks to the Cauchy-Schwarz inequality, one has:

$$E_v(T) \leq k \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)} H(T) - k H(T)^2, \quad (9)$$

where:

$$H(T) := \left\| \sqrt{\phi} \partial_t v \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)}.$$

Moreover, we have:

$$E_v(T) \geq \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t v)^2(\cdot, T) \geq \int_{\mathbb{R}^3} \phi (\partial_t v)^2(\cdot, T) = \frac{d}{dT} (H^2)(T).$$

So that, dividing by  $H(T)$  in (9) we find:

$$\frac{d}{dT} H(T) + k H(T) \leq k \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)}.$$

A classical calculation shows that this differential inequation yields:

$$H(T) \leq \int_0^T k \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,s] \times \mathbb{R}^3)} e^{k(s-T)} ds,$$

and since the map  $s \mapsto \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,s] \times \mathbb{R}^3)}$  is increasing with  $s$ , we finally get:

$$H(T) \leq \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)} (1 - e^{-kT}).$$

This inequality expresses the fact that despite the feedback part of Equation (5), its solution  $u$  keeps a certain amount of energy on the support of  $\phi$ , which is proportional to the same energy for  $u_0$ . Indeed:

$$\begin{aligned} \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)} &\geq \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)} - H(T) \\ &\geq \left\| \sqrt{\phi} \partial_t u_0 \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)} e^{-kT}, \end{aligned}$$

thus:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi (\partial_t u)^2 \geq \underbrace{\left( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi (\partial_t u_0)^2 \right)}_A e^{-2kT}. \quad (10)$$

The last step of this proof is the estimation of  $A$ . We have:

$$A \geq \int_{A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)} \int_0^T (\partial_t u_0)^2 = \int_{A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)} \int_0^T (\partial_t p_1 - \partial_t p_{\text{data}})^2 (T-t),$$

so that:

$$A \geq \int_{A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)} \int_0^T (\partial_t p_1 - \partial_t p_{\text{data}})^2 = \int_{1-\varepsilon/2}^{1+\varepsilon/2} \int_0^T \int_{S(0,\rho)} (\partial_t p_1 - \partial_t p_{\text{data}})^2.$$

Since  $p_1 - p_{\text{data}}$  vanishes on  $A(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)$  for every  $t > T$ :

$$A \geq \frac{1}{T} \int_{1-\varepsilon/2}^{1+\varepsilon/2} \int_0^\infty \int_{S(0,\rho)} t (\partial_t p_1 - \partial_t p_{\text{data}})^2.$$

Finally, applying (8) to  $p_1 - p_{\text{data}}$ , one has:

$$A \geq \frac{1}{T} \int_{1-\varepsilon/2}^{1+\varepsilon/2} \rho \frac{1}{2} \|f - f_{0,1}\|_{H_0^1(\mathbb{R}^3)}^2 d\rho,$$

which yields:

$$A \geq \frac{\varepsilon}{T} E_u(0). \quad (11)$$

Combining the above estimate with (7) and (10), we get:

$$E_u(T) \leq (1 - \frac{k\varepsilon}{T} e^{-2kT}) E_u(0),$$

which was the inequality to prove, with  $s := 1 - \frac{k\varepsilon}{T} e^{-2kT} < 1$ .

**Remark 6.** *Since we know that  $T = 2$ , there exists an optimal choice for the nudging parameter  $k$  which leads to  $s = 1 - \frac{\varepsilon}{8e}$ . Even though this theoretical convergence rate does not seem satisfactory, we shall see in Section 4 that the actual convergence is much faster in practice.*

#### 4. Numerical implementation

In order to test the numerical behaviour of the BFN method, we have implemented it in several situations. In particular, we have considered the case where the data are available only on a half-sphere, so that the illustration fits the practical experimental set-up.

Since the nature of the data allows the use of a variational formulation for the TAT inverse problem, we first describe a variational method, which shall be considered as a point of comparison.

##### 4.1. Variational approach

In this section, we consider the reconstruction of an object  $f_0 \in H_0^1(B(0,1))$  from a set of observations  $p_{\text{data}} = p_{\text{exact}} + p_{\text{noise}}$ . Here,  $p_{\text{exact}} := \mathcal{W} f_0$  where the linear operator  $\mathcal{W}$  maps an initial condition  $f$  to its related solution of the Cauchy problem (3) with a null derivative initial condition  $h = 0$ , restricted to a non-empty, open observation set  $A_\varepsilon \subset A(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ . Namely,  $\mathcal{W}$  can be written  $\mathcal{W} = \Phi W$ , with:

$$\begin{aligned} W: H_0^1(B(0,1)) &\longrightarrow C^0([0,T]; H_0^1(B(0,R))) \\ f &\longmapsto Wf, \end{aligned}$$

where  $Wf$  is the weak solution of (3) with the initial conditions  $l = f$  and  $h = 0$ . Even though  $Wf$  is defined on the whole space  $\mathbb{R}^3$ , we can choose  $R > 0$  large enough for any solution of (3) to keep a null trace on  $S(0,R)$ , such that the restriction of  $Wf$  to  $B(0,R)$  is in  $H_0^1(B(0,R))$  for every  $t \in [0,T]$ . The operator  $\Phi$  is the restriction operator:

$$\begin{aligned} \Phi: L^2([0,T] \times \mathbb{R}^3) &\longrightarrow L^2([0,T] \times A_\varepsilon) \\ g &\longmapsto g|_{A_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Our purpose is to solve the inverse problem:

$$\mathcal{W} f = p_{\text{data}},$$



by means of the following minimization problem:

$$(\mathcal{P}_\alpha) \left| \begin{array}{ll} \text{Minimize} & J_\alpha(f) \\ \text{s.t.} & f \in H_0^1(B(0,1)). \end{array} \right.$$

Here,  $J_\alpha$  is the Tikhonov functional:

$$\begin{aligned} J_\alpha: H_0^1(B(0,1)) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathcal{W}f - p_{\text{data}}\|_{L^2(A_\varepsilon)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \|f\|_{L^2(B(0,1))}^2, \end{aligned}$$

with  $\alpha > 0$ . Since  $\mathcal{W}$  is a bounded linear operator,  $J$  is a convex, differentiable and coercive functional, and any solution of  $(\mathcal{P}_\alpha)$  is characterized by:

$$\nabla J_\alpha(f) = \mathcal{W}^*(\mathcal{W}f - p_{\text{data}}) + \alpha f = 0.$$

For any  $\alpha > 0$ , the above equation has a unique solution:

$$f_\alpha = (\mathcal{W}^*\mathcal{W} + \alpha I)^{-1} \mathcal{W}^* p_{\text{data}},$$

so that Problem  $(\mathcal{P}_\alpha)$  is well-posed. We have chosen to solve this latter by means of the conjugate gradient method, which requires, at each iteration, the computation of  $\nabla J_\alpha$ .

Now, one has, for every  $\psi \in C_0^\infty(B(0,1))$  and  $f \in H_1^0(B(0,1))$ :

$$\begin{aligned} \langle \nabla J_\alpha(f), \psi \rangle_{L^2(B(0,1))} &= \langle \mathcal{W}^*(\mathcal{W}f - p_{\text{data}}), \psi \rangle + \alpha \langle f, \psi \rangle \\ &= \underbrace{\langle \mathcal{W}f - p_{\text{data}}, \mathcal{W}\psi \rangle}_{G_{f,\psi}} + \alpha \langle f, \psi \rangle, \end{aligned}$$

with:

$$\begin{aligned} G_{f,\psi} &= \int_0^T \int_{A_\varepsilon} (Wf - p_{\text{data}}) W\psi \\ &= \int_0^T \int_{B(0,R)} \mathbb{1}_{A_\varepsilon} (Wf - p_{\text{data}}) W\psi. \end{aligned}$$

Considering the weak solution  $u^*$  of the adjoint equation:

$$\begin{cases} \partial_{tt} u^*(x, t) - \Delta u^*(x, t) = \mathbb{1}_{A_\varepsilon} (Wf - p_{\text{data}}), \\ u^*(x, T) = 0, \\ \partial_t u^*(x, T) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

and since  $W\psi \in C_0^\infty(B(0,R))$ , we have:

$$G_{f,\psi} = \int_0^T \int_{B(0,R)} \partial_{tt} u^* W\psi + \int_0^T \int_{B(0,R)} \langle \nabla u^*, \nabla W\psi \rangle.$$

Since  $B(0,R)$  has been chosen large enough, applying Green's formula and integrating by parts yield:

$$\begin{aligned} G_{f,\psi} &= \int_0^T \int_{B(0,R)} u^* L W\psi - \int_{B(0,R)} \partial_t u^*(x, 0) W\psi(0) dx \\ &= \langle -\partial_t u^*(\cdot, 0), \psi \rangle. \end{aligned}$$

Finally:

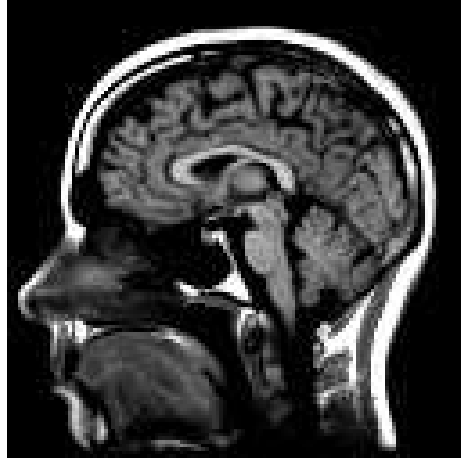
$$\nabla J_\alpha(f) = -\partial_t u^*(\cdot, 0) + \alpha f.$$

This calculation ensures that each iteration of the conjugate gradient algorithm necessitates successively the computations of  $Wf$  and of its adjoint state  $u^*$ , whose algorithmic complexity is comparable to one iteration of the BFN algorithm. This should be noted that the computation of the adjoint state requires the storage of  $Wf - p_{\text{data}}$  on  $A_\varepsilon$ , which is not required in the BFN algorithm.

Note that even if we have formulated the calculation of  $\nabla J_\alpha$  in a continuous framework, its discrete counterpart leads to similar considerations. Obviously, the behaviour of the method strongly depends on the scheme chosen to compute solutions of (3).

#### 4.2. Implementation

We now illustrate the behaviour of the BFN algorithm with numerical results. Figure 2 represents the 2-dimensional object to reconstruct  $f_0$ , which combines sharp contours with smoother areas. It is implemented as a 128 by 128 matrix.



**Figure 2.** The initial object  $f_0$

The forward and backward iterations of the BFN algorithm are computed by means of the classical explicit Euler scheme. This scheme is also used for the discretization of the operator  $W$  inverted with the variational approach. Unless we say so, the regularization parameter  $\alpha$  in the Conjugate Gradient method equals 0.

In order to avoid committing an inverse crime, the data are computed by means of a Crank-Nicholson scheme:

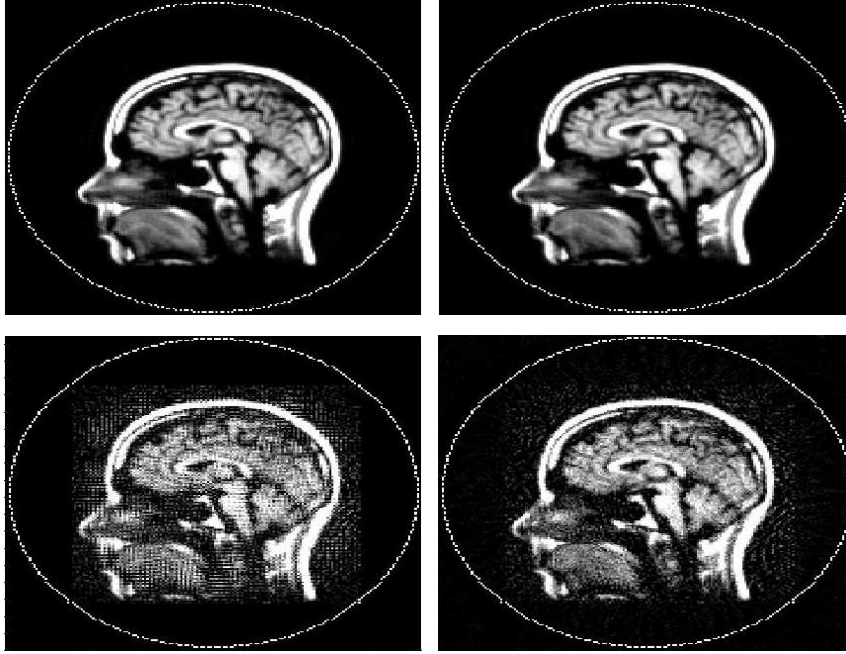
$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\delta t} = \Delta_{\delta x}(\theta u_{n+1} + (1 - \theta)u_n), \quad n \in [0 : N], \theta \in (0, 1),$$

where  $\Delta_{\delta x}$  is the classical five points discretization of the Laplace operator, to which a multiplicative white gaussian noise is added. Sensors are located on a sphere surrounding the object, and we use various configurations for their space distribution. If no additional information is given, 400 detectors are used when the data are

complete. Nevertheless some reconstructions were computed with only 200 detectors in order to enlight the robustness of the two techniques.

Finally, concerning the parameters of the algorithms, the backward nudging coefficient  $k$  remains to be chosen. While we can obviously affirm that, theoretically, the larger it is, the faster the solution tends to the observations (thanks to the energy equality (7), the discretization of the time-derivative of the solution imposes a coefficient  $k$  not larger than  $1/\delta t$ . In order to obtain the best convergence and to make the choice of  $k$  less arbitrary (and just fitting with the limits of the numerical method), it is defined as  $0.9/\delta t$ .

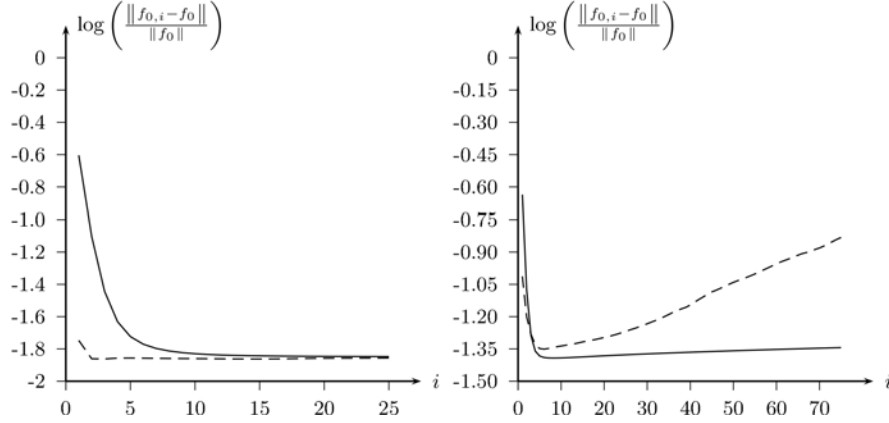
Figure 3 shows reconstructions when data are known on the whole sphere. While the two methods seem to be equivalent with noise-free data (top images), the CG method experiences much more sensitivity to noise (bottom images). This fact is illustrated in Figure 4 by means of the relative Log-RMS error plot.



**Figure 3.** Up: Reconstruction with complete noise-free data for CG (left) and BFN (right). Down: Reconstruction with complete noisy data (17%) for CG (left) and BFN (right).

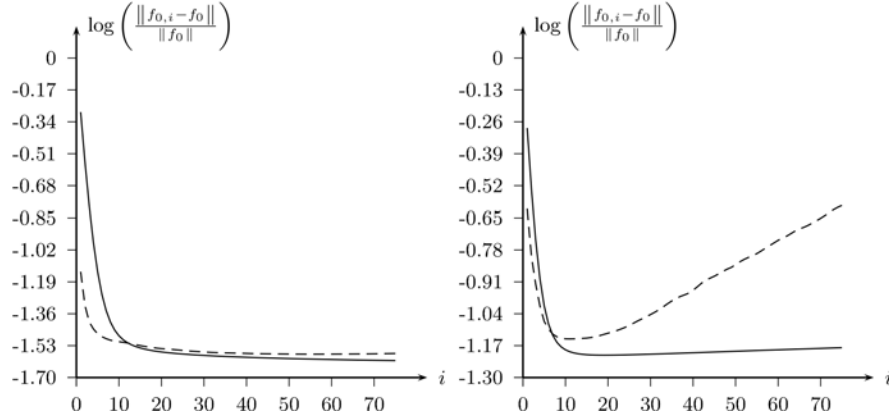
Note that the first steps of the CG method lead very rapidly to a nice approximation of the original object. Nevertheless, the BFN algorithm offers a stronger stability when the noise level increases. Indeed, when the regularization parameter is set to 0, the sensitivity of the CG algorithm to noise is not surprising since it solves an ill-posed least square problem [5], whereas the newtonian recall of the BFN may act as a regularization term. Note that the actual convergence rate is clearly better than the theoretical one, which takes into account the worst case situation.

Figure 6 shows the reconstructions in the case of incomplete data and Figure 5

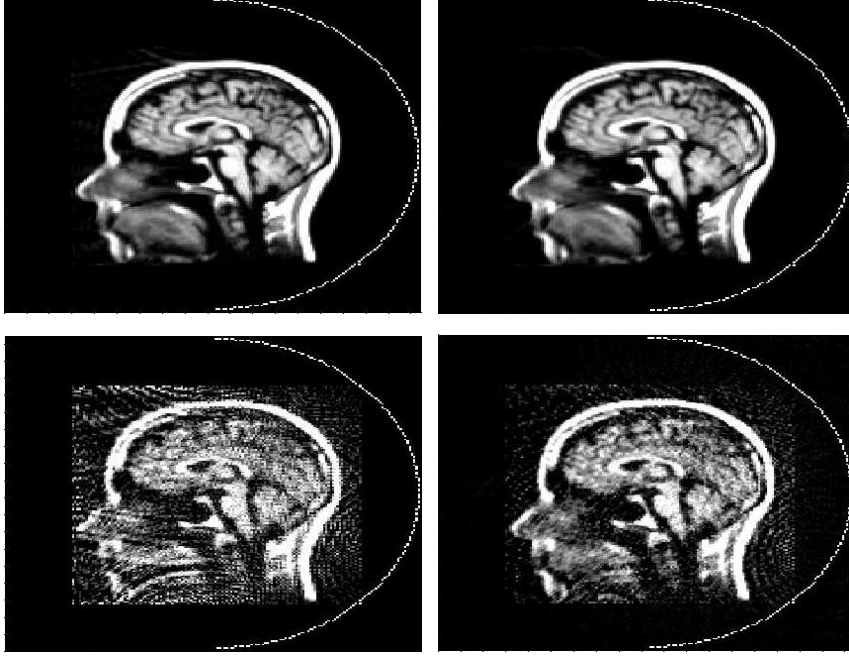


**Figure 4.** Relative Log-RMS error versus number of iterations. Left: Reconstruction with complete noise-free data for CG (dashed) and BFN. Right: Reconstruction with complete noisy data (17%) for CG (dashed) and BFN. Respective minimal errors: -1.35 and -1.39.

gives the graphics of their relative Log-RMS errors. In this situation, it is well known that, since some parts of the object located outside the half-disc are not visible, these ones cannot be stably reconstructed [38]. Indeed, singularities of the initial condition  $f_0$  propagate through straight lines called *bicharacteristics*, so that, if some of these lines do not intersect the observation surface, the data are smoother than they should be. In our setup, this phenomenon tends to blur the left part of the reconstructed object and to affect the asymptotic relative error.



**Figure 5.** Relative Log-RMS error versus number of iterations. Left: Reconstruction with noise-free data on a half-circle observation domain for CG (dashed) and BFN. Respective minimal errors: -1.58 and -1.6. Right: Reconstruction with noisy data (20%) on a half-circle observation domain for CG (dashed) and BFN. Respective minimal errors: -1.14 and -1.21.



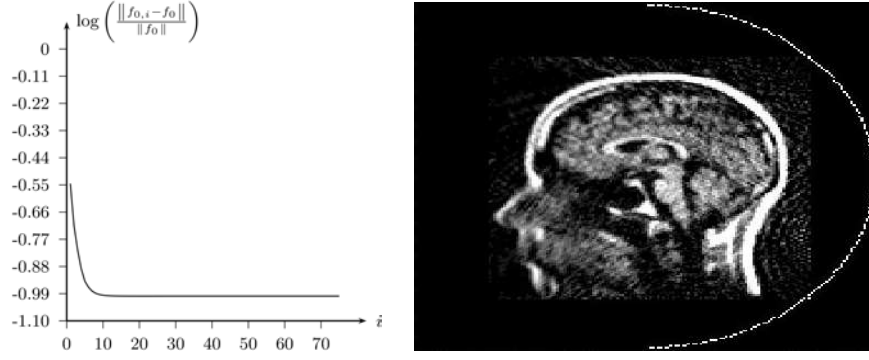
**Figure 6.** Up: Reconstruction with noise-free data on a half-circle observation domain for CG (left) and BFN (right). Down: Reconstruction with noisy data (20%) on a half-circle observation domain for CG (left) and BFN (right).

Once again, the BFN algorithm shows better robustness than the variational approach: the noise-free calculation shows that the variational approach is more sensitive to the lack of observations than the BFN, which is confirmed when noisy data are used (Figure 5).

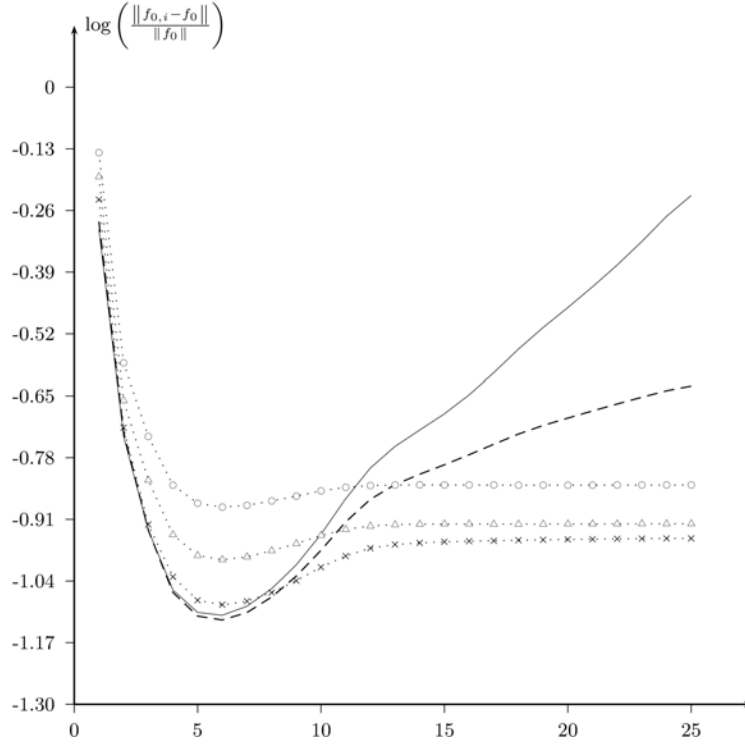
To go further into the stability analysis, we reduced the number of sensors to 200 and arranged them along the full circle. Since this situation reinforces the ill-posedness of the variational formulation, we computed the CG method with several non null regularization parameters  $\alpha$ . As shown in Figures 7 (where 200 sensors are still located on a half-circle observation domain) and 8, despite the fact that the algorithm can achieve stable convergence when  $\alpha$  is chosen large enough, the resulting regularization affects the minimum relative error.

Moreover, the fact that the BFN algorithm solves an ill-posed inverse problem explains that the reconstruction from noisy data cannot be perfectly stable (even though it is less sensible to noise), so that the relative Log-RMS plot tends to slightly increase with the number of iterations after the tenth of them (see e.g. Figures 5 and 8). As a matter of fact, the computed reconstructions show that one can reasonably stop the two algorithms after 10 iterations.

Note that if we have only introduced the BFN with a backward newtonian recall, this method remains valid with a nudging term in the forward evolution. Figure 9 shows a comparison between these two options. We see that the addition of the forward

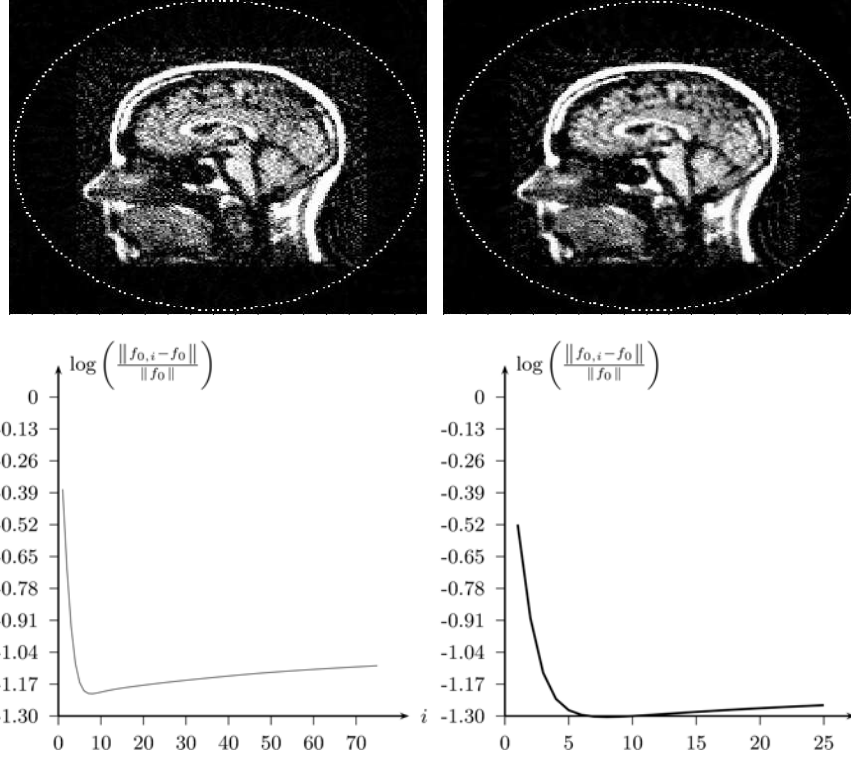


**Figure 7.** Stabilization of the CG method. Relative Log-RMS error versus number of iterations and reconstruction for the regularized CG algorithm ( $\alpha = 0.1$ ) with noisy data (20%) on a half-circle observation domain. Minimal error: -1.



**Figure 8.** Relative Log-RMS error versus number of iterations. Reconstruction with noisy data (20%) with 200 detectors. Regularized CG with  $\alpha = 0$  (thin line),  $\alpha = 0.01$  (dashed line),  $\alpha = 0.05$  (crosses),  $\alpha = 0.075$  (triangles) and  $\alpha = 0.1$  (circles).

recall improves the convergence rate of the algorithm as well as the reached minimal relative error.

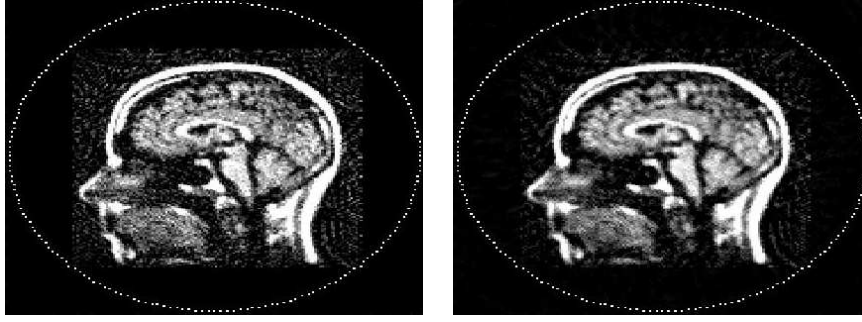


**Figure 9.** Reconstructions and relative Log-RMS errors with noisy data (20%) and 200 detectors. BFN (left) and BFN with a forward feedback parameter equal to the backward one (right).

So far, we did not find any relevant stopping criteria for these two algorithms. Nevertheless, it is interesting to compare the best estimate reached during the computation for each of them. This is the purpose of Figure 10. The two methods are satisfactory according to the following criteria: sharp contours and homogeneous areas reconstruction, and intensity levels. Only the noise pollution seems to speak in favour of the BFN technique.

## 5. Conclusions

We have established the theoretical geometrical convergence of the TAT-BFN algorithm. In principle, this method enables to make weaker assumptions in the TAT modelling (variable sound speed, damping, incomplete data, etc.). Even though the proof of the convergence has only been stated in an ideal framework, the numerical implementation of the algorithm showed that the BFN method remains efficient in more general situations. Indeed this technique still yields robust reconstructions in the noisy and incomplete data situation. Even though the convergence rate



**Figure 10.** Reconstruction with noisy data (20%) and 200 detectors. Best estimates obtained with each method: seventh iteration of the CG method – left – and of the BFN with forward recall – right. Respective minimal errors: -1.14 and -1.30 (versus -1.21 for the BFN with a null forward recall).

of the Conjugate Gradient method appears to be better, the BFN provides more satisfactory asymptotic behaviour and minimal relative error, along with a low numerical complexity.

From these preliminary results, one should now focus on their generalization to more realistic wave equations. For example, one may introduce some damping in the model and study the theoretical validity and convergence of the BFN method. Our first attempts in this direction (mainly numerical implementations) suggest future interesting developments.

## References

- [1] Joines W, Zhang Y, Li C, and Jirtle R. The measured electrical properties of normal and malignant human tissues from 50 to 900 mhz. *Med. Phys.*, 21:547–550, 1994.
- [2] Kruger R A, Stantz K M, and Kiser W L. Thermoacoustic CT of the breast. *Proc. SPIE*, 4682:521–525, 2002.
- [3] Paltauf G, Nuster R, Haltmeier M, and Burgholzer P. Photoacoustic tomography using a Mach-Zehnder interferometer as acoustic line detector. *Appl. Opt.*, 46:3352–3358, 2007.
- [4] Xu M and Wang L V. Photoacoustic imaging in biomedicine. *Rev. Sci. Instrum.*, 77(4):041101, 2006.
- [5] Scherzer O, Grasmair M, Grossauer H, Haltmeier M, and Lenzen F. *Variational methods in imaging*. Number 196 in Appl. Math. Sci. Springer, 2009.
- [6] Kuchment P and Kunyansky L. Mathematics of photoacoustic and thermoacoustic tomography. *arXiv:0912.2022v1*, 2009.
- [7] Finch D, Rakesh, and Patch S. Determining a function from its mean values over a family of spheres. *SIAM J. Math. Anal.*, 35(5):1213–1240, 2004.
- [8] Haltmeier M, Schuster T, and Scherzer O. Filtered backprojection for thermoacoustic computed tomography in spherical geometry. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 28:1919–1937, 2005.
- [9] Norton S J and Linzer M. Ultrasonic reflectivity imaging in three dimensions: Exact inverse scattering solutions for plane, cylindrical and spherical apertures. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 28:2002–2020, 1981.
- [10] Xu Y, Xu M, and Wang L V. Exact frequency-domain reconstruction for thermoacoustic tomography: II. cylindrical geometry. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 21(7):829–833, 2002.
- [11] Kunyansky L. A series solution and a fast algorithm for the inversion of the spherical mean radon transform. *Inv. Prob.*, 23:s11–s200, 2007.
- [12] Anastasio M A, Zhang J, Modgil D, and La Rivière P J. Application of inverse source concepts to photoacoustic tomography. *Inv. Prob.*, 23(6):S21–S35, 2007.



- [13] Xu Y, Feng D, and Wang L V. Exact frequency-domain reconstruction for thermoacoustic tomography: I. planar geometry. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 21(7):823–828, 2002.
- [14] Cox B T, Arridge S R, and Beard P C. Photoacoustic tomography with a limited-aperture planar sensor and a reverberant cavity. *Inv. Prob.*, 23:S97–S112, 2007.
- [15] Haltmeier M, Scherzer O, and Zangerl G. A reconstruction algorithm for photoacoustic imaging based on the nonuniform fft. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 28(3):1727–1730, 2009.
- [16] Haltmeier M and Scherzer O. Thermoacoustic tomography and the circular radon transform : exact inversion formula. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 17(4):635–655, 2007.
- [17] Xu Y, Wang L V, Ambartsoumian G, and Kuchment P. Reconstructions in limited-view thermoacoustic tomography. *Med. Phys.*, 31(4):724–733, 2004.
- [18] Kunyansky L. Thermoacoustic tomography with detectors on an open curve: an efficient reconstruction algorithm. *Inv. Prob.*, 24(5):055021, 2008.
- [19] Courant R and Hilbert D. *Meth. Math. Phys.*, volume 2. Wiley, 1989.
- [20] Bonnefond X and Maréchal P. A variational approach to the inversion of some compact operators. *Pac. J. Optim.*, 5(1):97–110, 2009.
- [21] Schuster T and Quinto E T. On a regularization scheme for linear operators in distribution spaces with an application to the spherical radon transform. *SIAM J. Appl. Math.*, 65(4):1369–1387, 2005.
- [22] Hristova Y, Kuchment P, and Nguyen L. Reconstruction and time reversal in thermoacoustic tomography in acoustically homogeneous and inhomogeneous media. *Inv. Prob.*, 24:055006, 2008.
- [23] Talagrand O. Assimilation of observations, an introduction. *J. Meteorol. Soc. Japan*, 75, No. 1B:191–209, 1997.
- [24] Auroux D and Blum J. The Back and Forth Nudging algorithm for oceanographic data assimilation. In *Proc. WMODA 5*, pages 273.1–273.8, 2009.
- [25] Lyne W H, Swinbank R, and Birch N T. A data assimilation experiment and the global circulation during the FGGE special observing periods. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 108:575–594, 1982.
- [26] Krishnamurti T N, Jishan X, Bedi H S, Ingles K, and Oosterhof D. Physical initialisation for numerical weather prediction over the tropics. *Tellus*, 43A:53–81, 1991.
- [27] Lorenc A C, Bell R S, and Macpherson B. The meteorological office analysis correction data assimilation scheme. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 117:59–89, 1991.
- [28] Auroux D and Bonnabel S. Symmetry-based observers for some water-tank problems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2010. DOI 10.1109/TAC.2010.2067291.
- [29] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME, ser. D, J. Basic Eng.*, 82:35–45, 1960.
- [30] Bucy R S and Joseph P D. *Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance*. John Wiley and Sons, 2nd edition, 2005.
- [31] Luenberger D G. Observers for multivariable systems. *IEEE Trans. Autom. Cont.*, AC-11:2:190–197, April 1966.
- [32] Auroux D and Blum J. A nudging-based data assimilation method for oceanographic problems: the Back and Forth Nudging (BFN) algorithm. *Nonlin. Proc. Geophys.*, 15:305–319, 2008.
- [33] Auroux D and Blum J. Back and Forth Nudging algorithm for data assimilation problems. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 340:873–878, 2005.
- [34] Talagrand O and Courtier P. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 113:1311–1328, 1987.
- [35] Talagrand O and Courtier P. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. II : Numerical results. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 113:1329–1347, 1987.
- [36] John F. *Plane Waves and Spherical Means*. Wiley Interscience, 1955.
- [37] Bers L, John F, and Schechter M. *Partial differential equations*. Interscience Publishers, 1964.
- [38] Stefanov P and Uhlmann G. Thermoacoustic tomography with variable sound speed. *Inv. Prob.*, 25:075011–075027, 2009.



# Conclusions

La résolution d'un problème inverse est toujours l'occasion de mettre en œuvre des outils très variés des mathématiques, qu'ils soient éprouvés ou en cours de développement. Depuis l'heuristique la plus floue jusqu'à une solide formalisation, les méthodes employées sont difficilement dissociables de leur application finale : ici la continuité d'un opérateur évoque une sensibilité au bruit, tandis que là un espace fonctionnel fait écho aux propriétés qualitatives et quantitatives des données, ou encore de l'image.

La tomographie thermoacoustique ne fait pas exception à la règle. La formalisation des phénomènes régissant l'émission et la réception du signal acoustique y est primordiale pour bien appréhender les propriétés des mesures disponibles, tandis que l'heuristique des problèmes bien posés fournit des lignes directrices lors de l'élaboration d'un processus d'inversion efficace. Que ce soit dans la prévention des déconvenues ou lors de l'interprétation des résultats finaux, les contraintes imposées par l'outil électronique sont omniprésentes.

Néanmoins, lorsque cela était possible, nous ne nous sommes pas restreints à l'application particulière qui nous préoccupait. Ainsi le procédé de régularisation par mollification reste opérant pour l'inversion de tout opérateur compact, ou même seulement régularisant. Il en est de même pour la stratégie d'estimation des paramètres de régularisation présentée ici.

J'espère que le travail de synthèse réalisé saura être utile à quiconque désire s'intéresser à ce domaine, tout comme il m'a servi à en préciser les enjeux présents et futurs. Cette vue d'ensemble permet, à mon sens, de mieux cerner les problèmes dont la résolution peut être considérée comme satisfaisante (inversion de la transformée de Radon sphérique en situation de données complètes, etc.), et ce afin de pouvoir se concentrer sur les problèmes encore ouverts. En effet il me paraît important d'affiner plus avant le modèle de

la tomographie thermoacoustique afin de rendre réalisable son application clinique à grande échelle. Outre l'atténuation de l'onde de pression lors de sa traversée du corps, il convient de comprendre les conséquences de la fatale inhomogénéité des tissus sondés, ainsi que l'influence des types de tissus non pris en compte jusque-là (côtes pour la mammographie, etc.). Les futurs travaux allant dans ce sens ne manqueront pas de faire émerger de nouveaux problèmes inverses, pour lesquels le back and forth nudging présenté ici me semble adapté, tant par sa flexibilité que par sa facilité de mise en œuvre.

# Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier Pierre Maréchal pour le soutien qu'il a su m'apporter durant ces trois années.

Un grand merci également à mes amis, qui se reconnaîtront.



# Bibliographie

- [1] H. Abdullah and A.K. Louis. The approximate inverse for solving an inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium. *Inverse Problems*, 15 :1213–1230, 1999.
- [2] M. Agranovsky, P. Kuchment, and E. T. Quinto. Range descriptions for the spherical mean radon transform. *Journal of Functional Analysis*, 248 :344–386, 2007.
- [3] M.L. Agranovsky and E.T. Quinto. Injectivity sets for the radon transform over circles and complete systems of radial functions. *Journal of Functional Analysis*, 139(2) :383–414, 1996.
- [4] N. Alibaud, P. Maréchal, and Y. Saesor. A variational approach to the inversion of truncated fourier operators. *Inverse Problems*, 25, 2009.
- [5] G. Ambartsoumian and P. Kuchment. On the injectivity of the circular radon transform. *Inverse Problems*, 21 :473–485, 2005.
- [6] M.A. Anastasio, J. Zhang, D. Modgil, and P.J. La Rivière. Application of inverse source concepts to photoacoustic tomography. *Inverse Problems*, 23(6) :S21–S35, 2007.
- [7] V.G. Andreev, A.A. Karabutov, and A.A. Oraevsky. Detection of ultrawide band ultrasound pulses in optoacoustic tomography. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 50(10) :1383–1390, 2003.
- [8] S.W. Anzengruber and R. Ramlau. Morozov’s discrepancy principle for tikhonov-type functionals with nonlinear operators. *Inverse Problems*, 26(2) :025001, 2010.
- [9] R. Arcangeli. Pseudo-solution de l’équation  $ax=y$ . *Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences*, 263 :282–285, 1966.
- [10] R. Arnott, S. Finger, and C.U.M. Smith. *Trepanation : discovery, history, theory*. Swets and Zeitlinger, 2002.

- [11] D. Azé and J.-B. Hiriart-Urruty. *Analyse variationnelle et optimisation*. Editions CEPADUES, 2010.
- [12] X. Bonnefond and P. Maréchal. A variational approach to the inversion of some compact operators. *Pacific Journal of Optimization*, 5(1) :97–110, 2009.
- [13] J.M. Borwein and A.S. Lewis. *Convex Analysis and Nonlinear Optimization. Theory and Examples*. CMS-Springer, 2 edition, 2005.
- [14] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1999.
- [15] P. Burgholzer, C. Hofer, G. Paltauf, M. Haltmeier, and O. Scherzer. Thermoacoustic tomography with integrating area and line detectors. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 52 :1577–1583, 2005.
- [16] P. Burgholzer, H. Roitner, J. Bauer-Marschallinger, and G. Paltauf. Image reconstruction in photoacoustic tomography using integrating detectors accounting for frequency-dependent attenuation. *Proceedings of the SPIE*, 7564 :75640O, 2010.
- [17] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, volume 2. Wiley, 1989.
- [18] B.T. Cox, S.R. Arridge, and P.C. Beard. Photoacoustic tomography with a limited-aperture planar sensor and a reverberant cavity. *Inverse Problems*, 23 :S97–S112, 2007.
- [19] B. Dacorogna and P. Maréchal. Convex  $SO(N) \times SO(n)$ -invariant functions and refinements of von neumann’s inequality. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2005.
- [20] Y. V. Egorov and M. A. Shubin. *Partial Differential Equations*, volume 4 of *Encyclopediae of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1993.
- [21] H.W. Engl. Discrepancy principles for tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 52(2) :209–215, 1987.
- [22] H.W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [23] H.W. Engl, K. Kunisch, and A. Neubauer. Convergence rates for tikhonov regularization of nonlinear ill-posed problems. *Inverse Problems*, 5 :523–540, 1989.



- [24] A.L. Fetter and J.D. Walecka. *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*. International Series in Pure and Applied Physics. McGraw-Hill, 1980.
- [25] D. Finch, M. Haltmeier, and Rakesh. Inversion of spherical means and the wave equation in even dimensions. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 68(2) :392–412, 2007.
- [26] D. Finch, S.K. Patch, and Rakesh. Determining a function from its mean values over a family of spheres. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 35(5) :1213–1240, 2004.
- [27] D. Finch and Rakesh. Trace identities for solutions of the wave equation with initial data supported in a ball. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 28(16) :1897–1917, 2005.
- [28] D. Finch and Rakesh. The range of the spherical mean value operator for functions supported in a ball. *Inverse Problems*, 22(3) :923, 2006.
- [29] D. Finch and Rakesh. *Recovering a function from its spherical mean values in two and three dimensions*, dans *Photoacoustic imaging and spectroscopy*. CRC Press, 2009.
- [30] H. Gfrerer. An a posteriori parameter choice for ordinary and iterated tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. *Mathematics of computation*, 49(180) :507–522, 1987.
- [31] G. H. Golub, M. Heath, and G. Wahba. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21 :215–223, 1979.
- [32] G. H. Golub and U. Matt. Generalized cross-validation for large scale problems. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 6 :1–34, 1995.
- [33] C.W. Groetsch. *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*. Pitman, 1984.
- [34] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, pages 49–52, 1902.
- [35] M. Haltmeier and O. Scherzer. Thermoacoustic tomography and the circular radon transform : exact inversion formula. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 17(4) :635–655, 2007.
- [36] M. Haltmeier, O. Scherzer, P. Burgholzer, and G. Paltauf. Thermoacoustic computed tomography with large planar receivers. *Inverse Problems*, 20 :1663–1673, 2004.

- [37] M. Haltmeier, T. Schuster, and O. Scherzer. Filtered backprojection for thermoacoustic computed tomography in spherical geometry. *Mathematical methods in the Applied Sciences*, 28 :1919–1937, 2005.
- [38] P. C. Hansen. The discrete picard condition of discrete ill-posed problems. *BIT*, 30(4) :658–672, 1990.
- [39] P. C. Hansen. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the l-curve. *SIAM Review*, 34(4) :561–580, 1992.
- [40] P.C. Hansen and D.P. O’Leary. The use of the l-curve in the regularization of discrete ill- posed problems. *SIAM Journal of Scientific Computation*, 14(6) :1487–1503, 1993.
- [41] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, volume 2. Springer-Verlag, 1993.
- [42] I. Hnetynkova, M. Plesinger, and Z. Strakos. Golub-kahan iterative bidiagonalization and determining the size of the noise in data. *BIT Numerical Analysis*, 49 :669–696, 2009.
- [43] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume 1. Springer-Verlag, 1985.
- [44] F. John. *Plane Waves and Spherical Means*. Wiley, 1955.
- [45] W. Joines, Y. Zhang, C. Li, and R. Jirtle. The measured electrical properties of normal and malignant human tissues from 50 to 900 mhz. *Medical Physics*, 21 :547–550, 1994.
- [46] B. Kastler, D. Vetter, Z. Patay, and P. Germain. *Comprendre l’IRM. Manuel d’auto-apprentissage*. 6 edition, 2006.
- [47] R.A. Kruger, W.L. Kiser, K.D. Miller, and H.E. Reynolds. Thermoacoustic ct : imaging principles. *Proceedings of the SPIE*, 3916 :150–159, 2000.
- [48] R.A. Kruger, K.M. Stantz, and W.L Kiser. Thermoacoustic ct of the breast. *Proceedings of the SPIE*, 4682 :521–525, 2002.
- [49] L. Kunyansky. A series solution and a fast algorithm for the inversion of the spherical mean radon transform. *Inverse Problems*, 23 :s11–s200, 2007.
- [50] L. Kunyansky. Thermoacoustic tomography with detectors on an open curve : an efficient reconstruction algorithm. *Inverse Problems*, 24(5) :055021, 2008.
- [51] K. P. Köstli and P. C. Beard. Two-dimensional photoacoustic imaging by use of fourier-transform image reconstruction and a detector with an anisotropic response. *Applied Optics*, 42 :1899–908, 2003.

- [52] A. Lannes, S. Roques, and M.-J. Casanove. Stabilized reconstruction in signal and image processing; part i :partial deconvolution an spectral extrapolation with limited field. *Journal of Modern Optics*, 34 :161–226, 1987.
- [53] J.P. Lefebvre. *Progress in linear inverse scattering imaging : NDE application of Ultrasonic Reflection Tomography*, pages 371–375. 1994.
- [54] A. S. Lewis. The convex analysis of unitarily invariant matrix functions. *Journal of Convex Analysis*, 2 :173–183, 1995.
- [55] G. F. A. L'Hospital (de). *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. Imprimerie royale, [http ://gallica.bnf.fr/ark :/12148/bpt6k205444w](http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k205444w), 1696.
- [56] P. Liu. Image reconstruction from photoacoustic pressure signals. *Proceedings of the SPIE*, (2681) :285–296, 1996.
- [57] A. K. Louis and E. T. Quinto. *Local tomographic methods in Sonar*, dans *Surveys on solution methods for inverse problems*, pages 147–154. Springer, 2000.
- [58] A.K. Louis. Approximate inverse for linear and some nonlinear problems. *Inverse Problems*, 12 :175–190, 1996.
- [59] A.K. Louis. A unified approach to regularization methods for linear ill-posed problems. *Inverse Problems*, 15 :489–498, 1999.
- [60] A.K. Louis. Filter design in three-dimensional cone beam tomography : circular scanning geometry. *Inverse Problems*, 19 :S31–S40, 2003.
- [61] A.K. Louis and P. Maaß. A mollifier method for linear operator equations of the first kind. *Inverse Problems*, 6 :427–440, 1990.
- [62] A.K. Louis and T. Schuster. A novel filter design technique in 2d computerized tomography. *Inverse Problems*, 12 :685–696, 1996.
- [63] J. Lucas-Championnière. *Les origines de la trépanation décompressive. Trépanation néolithique, trépanation pré-colombienne, trépanation des Kabyles, trépanation traditionnelle*. Steinheil, 1912.
- [64] P. Maréchal, D. Togane, A. Celler, and J. M. Borwein. Computation and stability analysis for regularized tomographic reconstructions. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 46 :2177–2184, 1999.
- [65] D. Mariano-Goulart, P. Maréchal, L. Giraud, S. Gratton, and M. Fourcade. A priori selection of the regularization parameters in emission tomography by fourier synthesis. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 31 :502–509, 2007.

- [66] A. Morozov. On the solution of functional equations by the method of regularization. *Soviet Mathematics Doklady*, 7 :414–417, 1966.
- [67] V.A. Morozov. *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*. Springer Verlag, 1984.
- [68] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. SIAM Classics in Applied Mathematics. SIAM, 2001.
- [69] L.V. Nguyen. On singularities and instability of reconstruction in thermoacoustic tomography. *arXiv : math.AP/0911.5521v1*, 2009.
- [70] S.J. Norton. Reconstruction of a two-dimensional reflecting medium over a circular domain : Exact solution. *Journal of the Acoustical Society of America*, 67(4) :1266–1273, 1980.
- [71] S.J. Norton and M. Linzer. Ultrasonic reflectivity imaging in three dimensions : Exact inverse scattering solutions for plane, cylindrical and spherical apertures. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 28 :2002–2020, 1981.
- [72] V. Palamodov. *Reconstructive Integral Geometry*. Birkhäuser, 2004.
- [73] V. Palamodov. Remarks on the general funk-radon transform and thermoacoustic tomography. *arXiv : math.AP/0701204*, 2007.
- [74] G. Paltauf, R. Nuster, M. Haltmeier, and P. Burgholzer. Photoacoustic tomography using a mach-zehnder interferometer as acoustic line detector. *Applied Optics*, 46 :3352–3358, 2007.
- [75] I. Podlubny. *Fractional differential equations*, volume 198 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press Inc., 1999.
- [76] T.D.E. Rossing. *Handbook of Acoustics*. Springer, 2007.
- [77] O. Scherzer, M. Grasmair, H. Grossauer, M. Haltmeier, and F. Lenzen. *Variational methods in imaging*. Number 196 in Applied Mathematical Sciences. Springer, 2009.
- [78] T. Schuster and E.T. Quinto. On a regularization scheme for linear operators in distribution spaces with an application to the spherical radon transform. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(4) :1369–1387, 2005.
- [79] T.I. Seidman and C.R. Vogel. Well posedness and convergence of some regularisation methods for non-linear ill posed problems. *Inverse Problems*, 5 :227–238, 1989.
- [80] P. Stefanov and G. Uhlmann. Thermoacoustic tomography with variable sound speed. *Inverse Problems*, 25 :075011–075027, 2009.

- [81] E.M. Stein and W. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1971.
- [82] T.L. Szabo. Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law. *Journal of the Acoustical Society of America*, 96 :491–500, 1994.
- [83] T.L. Szabo. Causal theories and data for acoustic attenuation obeying a frequency power law. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97 :414–24, 1995.
- [84] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin. *Solutions of Ill-Posed Problems*. John Wiley & Sons, 1977.
- [85] K.R. Waters, M.S. Hughes, G.H. Brandenburger, and J.G. Miller. On a time-domain representation of the Kramers-Krönig dispersion relation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 108(5) :2114–2119, 2000.
- [86] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, <http://www.archive.org/download/treatiseontheory00watsuoft/treatiseontheory00watsuoft.pdf>, 1922.
- [87] M. Xu and L.V. Wang. Time-domain reconstruction for thermoacoustic tomography in a spherical geometry. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(7) :814–822, 2002.
- [88] M. Xu and L.V. Wang. Analytic explanation of spatial resolution related to bandwidth and detector aperture size in thermoacoustic or photoacoustic reconstruction. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 67(5) :056605, 2003.
- [89] M. Xu and L.V. Wang. Photoacoustic imaging in biomedicine. *Review of Scientific Instruments*, 77(4) :041101, 2006.
- [90] Y. Xu, D. Feng, and L. V. Wang. Exact frequency-domain reconstruction for thermoacoustic tomography : I. planar geometry. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(7) :823–828, 2002.
- [91] Y. Xu, L.V. Wang, G. Ambartsoumian, and P. Kuchment. Reconstructions in limited-view thermoacoustic tomography. *Medical Physics*, 31(4) :724–733, 2004.
- [92] Y. Xu, M. Xu, and L. V. Wang. Exact frequency-domain reconstruction for thermoacoustic tomography : II. cylindrical geometry. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(7) :829–833, 2002.

**Résumé :** La Tomographie ThermoAcoustique (TTA) est une technique d'imagerie médicale où un corps exposé à une impulsion électromagnétique génère une onde acoustique mesurée autour de celui-ci. Le modèle établi pour la TTA conduit au problème inverse suivant : étant connue la solution d'une équation des ondes sur une hypersurface, il s'agit de reconstruire sa condition initiale. Malgré l'existence de formules explicites, aucune procédure d'inversion rapide, stable et valable en situation clinique n'existe à ce jour. Outre une synthèse des travaux existants, l'objet de ce travail a été, dans un premier temps, d'élaborer une approche variationnelle pour le problème de la TTA. Nous avons considéré la régularisation par mollification, où l'objet à reconstruire est remplacé par une version à résolution limitée, tandis que les données sont traitées pour plus de cohérence. De plus, une stratégie de sélection de paramètre de régularisation utilisant les méthodes de Krylov, et valable pour les régularisations de type Tikhonov, est proposée. Dans un deuxième temps, le modèle usuel de la TTA a été remis en question afin de prendre en compte l'atténuation subie en pratique par l'onde mesurée. On propose plusieurs équations des ondes atténuées causales. Cette évolution du modèle nous a conduit à tester la méthode du Back and Forth Nudging (BFN), issue du champ de l'assimilation de données, consistant à introduire un rappel aux données newtonien dans l'équation des ondes, puis à alterner des résolutions en temps direct et rétrograde. La convergence de la méthode est démontrée dans un cas idéal, mais le procédé offre d'excellents résultats en situation de données incomplètes et atténuées.

**Abstract :** ThermoAcoustic Tomography (TAT) is a medical imaging technique using the pressure wave generated by a body illuminated by an electromagnetic pulse. Since the acoustic signal is recorded around the body, the resulting inverse problem can be formulated as follows : from the knowledge of a solution of the wave equation on some hypersurface, reconstruct its initial condition. Despite several inversion formulas, so far no efficient procedure, taking partial data and damping into account, is known. As well as a state of the art, this work is dedicated to the introduction of a variational approach for the TAT problem. We studied the regularization by mollification, which consists in replacing the original object by a limited resolution version of it, and treating the data so that they fit this new objective. Moreover, we used a noise level estimation provided by the Golub-Kahan bidiagonalization process to allow an accurate regularization parameter selection. In the second part of this work, we investigate the usual TAT model and put forward some damped wave equation with a finite wave front speed. This improvement yields to the use of the Back and Forth Nudging (BFN) method, which was first implemented for data assimilation purposes, to invert the TAT problem. This technique provides a sequence of approximations of the solution by iterating forward and backward implementations of a wave equation including a newtonian recall to the data. This method, which is proved to be convergent in an ideal framework, leads to convincing results in both partial data and attenuated wave cases.